MSC 60D05

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗАМКНУТЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ С ОДНОМЕРНЫМ КОМПАКТНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ПОГРУЖЕНИЯ

[**]О.Л. Шпилинская, [*]Ю.П. Вирченко

[*]Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

[**]Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Изучается метод построения распределений вероятностей для случайных замкнутых сепарабельных множеств, каждое из которых состоит с вероятностью 1 из конечного дизъюнктивного набора отрезков (компонент) в $[0, 1]$. Этот метод основан на задании бесконечного набора *частных распределений* для случайных величин – концов компонент случайного множества. Устанавливается связь такого метода задания распределения вероятностей с разработанным ранее формализмом построения вероятностного описания случайных множеств на основе многоинтервальных функций [1].

Пусть Ω – система множеств из [0,1], содержащая все замкнутые подмножества.

Определение 1. *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ *называется случайным замкнутым множеством, если* σ*-алгебра* $\mathfrak{F}$ *содержит все замкнутые подмножества [0,1] и для любого события* $X \in \mathfrak{F}$ *выполняется* $\mathsf{P}(X) = \mathsf{P}(\mathrm{cl}(X))$.

Следующее определение сепарабельности случайного множества аналогично соответствующему определению в теории случайных процессов [2].

Определение 2. *Случайное замкнутое множество* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ *назовем сепарабельным, если для любого счетного, всюду плотного в* $[0, 1]$ *множества* $\Lambda \subset [0, 1]$ *выполняется*

$$\Pr\{\tilde{X} = \mathrm{cl}(\tilde{X} \cap \Lambda)\} = 1\,.$$

В работе [1] было доказано, что распределение вероятностей случайных множеств может быть задано на основе бесконечного набора многоинтервальных функций

$$R(a_1, b_1; ...; a_n, b_n) = \Pr\{\tilde{X} \cap [a_1, b_1] = \varnothing, ..., \tilde{X} \cap [a_n, b_n] = \varnothing\}\,, \tag{1}$$

$0 \le a_1 < b_1 < ... < a_n < b_n \le 1$, $n \in \mathbb{N}$. Эти функции не очень удобны в операционном отношении, но являются универсальными. Они могут быть использованы для определения распределения вероятностей любого замкнутого случайного множества.

Введем для произвольного натурального $m \in \mathbb{N}$ класс $\mathbf{Q}_m$, который состоит из случайных замкнутых множеств в [0,1], реализациями которых являются объединения m

дизъюнктивных отрезков $[\alpha_i, \beta_i] \subset [0,1]$, $i = 1 \div m$. Для множеств этого класса определим функции распределения

$$F_m(x_1, y_1; ....; x_m, y_m) =$$

$$\Pr\{\langle \alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_m, \beta_m \rangle \in [0,1]^m : \alpha_i < x_i, \beta_i < y_i, \alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}; i = 1, ..., m\} ,$$

где $\alpha_{m+1} = 1$, неубывающие по каждому из аргументов и при этом $F(0, ..., 0) = 0$, $F(1, ..., 1) = 1$. Для этой функции справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы неубывающая по своим $2m$ аргументам неотрицательная функция $F_m(x_1, y_1; ...; x_m, y_m) : [0,1]^{2m} \to [0,1]$, которая удовлетворяет условиям $F_m(1,1; \ldots; 1,1) = 1$, $F_m(0,0; \ldots; 0,0) = 0$, определяла распределение вероятностей для случайных интервалов $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1 \div m$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i = 1 \div m$ выполнялось $F_m(x_1, y_1; \ldots; x_i, y_i; \ldots; x_n, y_n) = F_m(x_1, y_1; \ldots; y_i, y_i; \ldots; x_n, y_n)$, если $y_i < x_i$ и*

$$F_m(x_1, y_1; \ldots; x_i, y_i; x_{i+1}, y_{i+1}; \ldots; x_n, y_n) = F_m(x_1, y_1; \ldots; x_i, x_{i+1}; x_{i+1}, y_{i+1}; \ldots; x_n, y_n) ,$$

если $y_i > x_{i+1}$.

Очевидно, что в общем случае каждая из функций F_m, $m \in \mathbb{N}$ может быть представлена в виде 3^{2m} слагаемых, которые представляют собой меры, чистые по каждому из $2m$ аргументов. Это устанавливается разложением Лебега по каждому из них.

В простейшем и наболее востребованном в приложениях случае эти функции являются абсолютно непрерывными по всем аргументам. В этом случае для каждой из них можно вести соответсвтующую плотность f_m, которая тождественно равна 0 в том случае, если хотя бы для одного номера $i = 1 \div m$ выполняется: либо $y_i > x_{i+1}$, либо $y_i < x_i$. Тогда

$$F_m(x_1, y_1; ...; x_m, y_m) = \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{y_1} dy_1 ... \int_{y_{m-1}}^{y_m} dx_m \int_{x_m}^{y_m} f_m(x_1, y_1; ...; x_m, y_m) dy_m .$$

$i = 1 \div m$.

Число m, в общем случае, является значением случайной величины ν, принимающей значения в $\mathbb{N}_+$. Распределение вероятностей такого случайного множества задается бесконечым набором функций F_m и связанным с ним распределением вероятностей $p_m = \Pr\{\nu = m\}$.

Взаимно однозначное соответствие между набором функций F_m, $m \in \mathbb{N}$ и набором $R(a_1, b_1; ...; a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$ многоинтеравальных функций распределения случайных множеств устанавливается алгебраическими соотношениями. В частности, для множеств класса $\mathbf{Q}_1$ имеет место формула

$$R(a_1, b_1; ...; a_n, b_n) = F_1(a_1, a_1) + \sum_{i=1}^{n} (F_1(a_{i+1}, a_{i+1}) - F_1(b_i, a_{i+1})) ,$$

где $a_{n+1} = 1$.

Кроме того, для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$ одноинтервальное распределение вероятностей множества класса $\mathbf{Q}_m$ выражется формулой

$$R(a,b) = F_m(a,a;...;a,a) + (F_{m-1}(a,a;...;a,a) - F_m(a,a;...;a,a;b,1)) + ... + (1 - F_1(b,1))\,,$$

где имеет место $F_{l+1}(x_1,y_1;...;x_l,y_l;1,1) = F_l(x_1,y_1;...;x_l,y_l)$, $l = 1,2,\ldots,m-1$.

В общем случае они выражаются на основе вероятностей

$$R_{n,m}(a_i,b_i;i=1\div n|a,b) = \Pr\{[\alpha_j,\beta_j] \subset [a,b], [a_i,b_i] \cap [\alpha_j,\beta_j] = \varnothing; i = 1\div n, j = 1\div m\}\,,$$

вычисляемых посредством справедливых при всех $n,m \in \mathbb{N}$ рекуррентных соотношений

$$R_{n+1,m}(a_i,b_i;i=1\div n+1|a,b) =$$

$$R_{n,m}(a_i,b_i;i=1\div n|a,a_{n+1}) + R_{n,m}(a_i,b_i;i=2\div n+1|b_1,b) - R_{n-1,m}(a_i,b_i;i=2\div n|b_1,a_{n+1})\,.$$

Литература

1. Virchenko Yu.P., Shpilinskaya O.L. Marginal probability distributions of random sets in $\mathbb{R}$ with markovian refinements // Theory of stochastic processes. – 2005. – 11(27);3-4. – P.121-130.

2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов / М.: Наука, 1977. -– 567 с.