

MSC 35J45

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛАМЕ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *)

С.П. Митин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Рассмотрим в области D на плоскости систему Ламе

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

с кусочно постоянными матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

которые сохраняют постоянное значение в некоторой подобласти $D_0 \subseteq D$ и в ее дополнении $D_1 = D \setminus D_0$. Предполагается, что D и D_0 ограничены сомкнутыми ляпуновскими дугами, соответственно Γ и Γ_0 с общими концами в одной точке τ (можно считать $\tau = 0$), причем в этой точке они некасательны друг к другу.

Требуется найти вектор смещения $u = (u_1, u_2) \in C(\bar{D})$, являющийся решением системы (1) в $D_0 \cup D_1$, удовлетворяющий краевому условию Дирихле

$$u|_{\Gamma} = f \quad (2)$$

и подчиненный контактному условию

$$(\sigma^+ - \sigma^-)n|_{\Gamma_0} = 0, \quad (3)$$

где знаки $+$ и $-$ соответствуют предельным значениям кусочно постоянного тензора напряжений σ на Γ_0 изнутри и снаружи D_0 и n означает единичную нормаль на Γ_0 (внешнюю по отношению к D_0).

Задачи подобного типа возникают в механике композитных материалов[1]. Более типична и хорошо изучена (см., например, [2,3]) ситуация, когда Γ_0 является гладкой

*)Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.А18.21.0357).

разомкнутой дугой с концами на ∂D , разбивающая D на две «равноправные» подобласти.

С помощью теоретико-функционального подхода[4], основанного на представлении общего решения системы Ламе через функции, аналитические по Дуглису, задача (1)-(3) редуцирована к так называемой нелокальной задаче Римана[5] для этих функций. В терминах конечного символа выписаны условия разрешимости этой задачи и описана асимптотика тензора напряжений в угловой точке области.

Литература

1. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / М., 1983.
2. Hein V.L., Erdogan F. // Internat. J. of Fracture Mech. – 1971. – 7. – P.317- 330.
3. Митин С.П., Солдатов А.П. О разрешимости смешанно-контактной задачи плоской теории упругости / Дифференц. уравн. – 1993. – 29, №.5. – С.885-889.
4. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Известия РАН (сер. матем.). – 2006. – 70, №6. – С.161-192.
5. Солдатов А.П. Общая краевая задача теории функций // Докл.АН СССР. – 1988. – 299, №.4. – С.825-828.