MSC 34K30

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ АДАМАРА

Т.А. Манаенкова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: Manaenkova@bsu.edu.ru

В банаховом пространстве X при $0<\alpha,\beta<1$ рассмотривается задача типа Коши

$$ {}^H D^{\alpha}_{a+}\, {}^H D^{\beta}_{a+} u(t) = Au(t), \qquad t>a, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to a+} {}^H D^{\beta-1}_{a+} u(t) = 0, \quad \lim_{t\to a+} {}^H D^{\alpha-1}_{a+}\left({}^H D^{\beta}_{a+} u(t)\right) = u_1, \tag{2}$$

при этом будем считать, что A — линейный замкнутый оператор, ${}^H D^{\beta-1}_{a+}u(t) = {}^H I^{1-\beta}_{a+}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\displaystyle\int_a^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{-\beta} u(x)\,\frac{dx}{x}$ — левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $1-\beta$ (см. [1]).

Применим к обеим частям уравнения (1) операторы ${}^H I^{\alpha}_{a+}$ и ${}^H I^{\beta}_{a+}$ дробного интегрирования порядка α. Учитывая начальные условия, получим интегральное уравнение вида

$$u(t) = \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{u_1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} Au(s)\frac{ds}{s} \;. \tag{3}$$

Определение 1. *Интегральное уравнение* (3) *называется равномерно корректным, если для каждого* $u_1\in D(A)$ *существует единственное решение* $u(\tau;u_1)\in C(\mathbb{R}_+,D(A))$ *этого уравнения и если* $u_{1,m}\in D(A)$, $u_{1,m}\to 0$ *влечет сходимость* $u(\tau;u_{1,m})\to 0$ *равномерно по* t *на любом компактном интервале из* $(0,\infty)$.

Определение 2. *Операторная функция* $W_{\alpha,\beta}(\tau)\in\mathcal{B}(X)$ *называется разрешающим оператором для задачи* (1), (2), *если выполнены следующие условия:*

(i) $W_{\alpha,\beta}(\tau)$ *сильно непрерывна при* $t>0$ *и* $D^{\alpha-1}_{0+}(D^{\beta}_{0+})W_{\alpha,\beta}(0) = I$,

(ii) $W_{\alpha,\beta}(\tau)$ *коммутирует с* A, *то есть,* $W_{\alpha,\beta}(\tau)D(A)\subset D(A)$ *и* $AW_{\alpha,\beta}(\tau)u_{n-1} = W_{\alpha,\beta}(\tau)Au_{n-1}$ *для любого* $u_{n-1}\in D(A)$ *и* $t>0$,

(iii) $W_{\alpha,\beta}(\tau)u_{n-1}$ *является решением задачи* (1), (2) *для любого* $u_{n-1}\in D(A)$ *и* $t>0$.

Определение 3. *Будем говорить, что оператор* A *принадлежит классу* $\mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$, *если задача* (1), (2) *имеет разрешающий оператор* $W_{\alpha,\beta}(\tau)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$\|W_{\alpha,\beta}(\tau)\| \le M\left(\ln\frac{\tau}{a}\right)\tau^{\omega}, \quad \tau>0, \tag{4}$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ *и функция* $M(\tau) = \tau^{\alpha+\beta-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Лемма 1. *Пусть* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$, *тогда оператор* $(\lambda^{\alpha+\beta}I - A)$ *обратим и* $\widehat{W}_{\alpha,\beta}(\lambda) = R(\lambda^{\alpha+\beta}, A)$, *то есть, множество* $\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega\}$ *включено в* $\rho(A)$ *и*

$$R(\lambda^{\alpha+\beta}, A)u_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} W_{\alpha,\beta}(t) u_1\, dt, \quad u_1 \in X. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *Тогда* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *оператор* $D_{0+}^{\alpha-1} D_{0+}^{\beta} W_{\alpha,\beta}(t)$ *непрерывен в равномерной операторной топологии только тогда, когда* $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha, \beta < 1$. *В этом случае* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ *и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\omega)^n}{n!} \left\| \frac{d^n R(\lambda^{\alpha+\beta}, A)}{d\lambda^n} \right\| \le K_0, \qquad \lambda > \omega,\ K_0 > 0. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha \le 2$. *Тогда* $A \in \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ *и существует сильно непрерывная операторная функция* $W(t)$, *удовлетворяющая неравенству* $\|W(t)\| \le M(t)t^\omega$, $t > 0$, $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *такая, что*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} W(t) u_{n-1}\, dt, \quad u_{n-1} \in X, \tag{7}$$

и в этом случае $W(t) = W_{\alpha,\beta}(t)$.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.