MSC 80M99

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНВЕКТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Н.В. Малай, Н.Н. Миронова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: malay@bsu.edu.ru, mironovanadya@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу для конвективного уравнения теплопроводности с учетом степенного вида зависимости теплопроводности $\lambda_g = \lambda_\infty t_g^\alpha$, $\lambda_p = \lambda_\infty t_p^\gamma$ и плотности газообразной среды от температуры в сфероидальной системе координат. Значения показателей α и γ зависят от вида газа.

$$\rho_g c_{pg} (U_g \cdot \nabla) T_g = \mathrm{div}(\lambda_g \nabla T_g), \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,(\lambda_p \nabla T_p) = -q_p\,, \tag{2}$$

где T_g, ρ_g — температура и плотность вязкой среды, c_{pg} и λ_g — соответственно, удельная теплоемкость при постоянном давлении и коэффициент теплопроводности газообразной среды. Здесь и далее индексы «g» и «p» будем относить к газообразной среде и частице.

Система уравнений (1)-(2) решается со следующими краевыми условиями в системе координат сплюснутого сфероида (τ, η, φ):

$$\tau = \tau_0: \qquad T_g = T_p, \qquad \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial \tau} = \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \tau} + \sigma_0 \sigma_1 (T_p^4 - T_\infty^4)\,, \tag{3}$$

$$\tau \to \infty: \qquad T_g \to T_\infty\,, \tag{4}$$

$$\tau \to 0: \qquad T_p \neq \infty\,, \tag{5}$$

где σ_0 – интегральная степень черноты, а σ_1 – постоянная Стефана-Больцмана. Индексом «∞» обозначены значения физических величин, характеризующих газообразную среду вдали от частицы.

В граничных условиях на поверхности частицы (3) учтено условие равенства температур и непрерывность потоков тепла. В качестве условий на ∞ приняты условия (4). В граничном условии (5) отражена конечность физических величин.

Удобно ввести систему отсчета, связанную с центром масс движущейся частицы, а ось Oz ориентировать по направлению распространения однородного потока излучения так чтобы она совпала с осью симметрии сфероида (задача в этом случае сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком).

Основная трудность, возникающая при решении такой системы связана с ее нелинейностью. В работе рассматривается не изотермическая газообразная среда. Это означает имеет место произвольный перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. В такой постановке задачи конвективный $\rho_g c_{pg} (\mathbf{U}_g \cdot \nabla) T_g$ и основной

$\mathrm{div}(\lambda_g \nabla T_g)$ члены в уравнении теплопроводности (1) становятся сравнимыми по порядку величины и им нельзя пренебречь. В этом случае обычный метод разложения по малому параметру дает известную погрешность, поскольку уже во втором приближении не позволяет строго удовлетворить граничным условиям на бесконечности и получить достаточно пригодное решение, однородно справедливое для всей области течения.

Решение конвективного уравнения (1), удовлетворяющего смешанным краевым условиям, можно найти, используя метод сращиваемых асимптотических разложений. Главная идея, лежащая в основе этого метода, заключается в представлении решения несколькими разложениями, каждое из которых пригодно в некоторой части рассматриваемой области, причем области применимости соседних разложений перекрываются, что и позволяет провести их сращивание [1, 2].

Кроме того, в работе рассматривается сфероидальная система координат, а в этой системе координат коэффициенты Ламэ зависят от двух переменных, что приводит к дополнительным математическим трудностям.

Если заменить краевое условие (4) на условие, которое в системе координат сплюснутого сфероида имеет вид:

$$\tau \to \infty : \qquad T_g \to T_\infty + |\nabla\, T_g| c \,\mathrm{sh}\, \tau \cos \eta, \tag{6}$$

то краевую задачу (3), (5)-(6) для нелинейного уравнения конвективной теплопроводности (1)-(2) можно решить другим методом — методом последовательных приближений. Использование этого метода связано с особенностью постановки краевых условий вдали от частицы (на бесконечности).

В рассмотренных математических методах важное место отводится малому параметру. Определяющими параметрами задачи являются материальные постоянные ρ_∞, μ_∞, c_{pg} и сохраняющиеся в процессе движения частицы параметры R, $|\nabla\, T_g|$, T_∞ и U. Здесь $U-$ характерная скорость задачи. Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию $\mathrm{Re}_\infty = R\, U\, \rho_\infty/\mu_\infty$. В задаче, кроме числа Рейнольдса, имеется еще один малый контролируемый параметр $\zeta = R|\nabla T_g|/T_\infty$, характеризующий перепад температуры на размере частицы. По порядку величины характерная скорость равна $U \sim \mu_\infty|\nabla\, T_g|/(\rho_\infty T_\infty)$ и число Рейнольдса построенное по этой характерной скорости совпадает с малым параметром $\zeta = R|\nabla T_g|/T_\infty$. Поэтому при решении задачи методом сращиваемых асимптотических разложений удобнее пользоваться малым параметром Re, а при решении задачи методом последовательных приближений - параметром ζ.

Литература

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.: Мир, 1967. – 310 с.
2. Найфе А. Введение в методы возмущений / М.: Мир, 1984. -– 536 с.