MSC 11P99

БИНАРНЫЕ АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Рассматривается задача получения асимптотических формул для числа решений уравнения с квадратичными формами, родственная проблеме делителей Ингама.

Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F, $Q_1(\overline{m})$ и $Q_2(\overline{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_1 и A_2, $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$.

Теорема 1. *Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F, $n, h \in N$, $h \le n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

$G_i(q,l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{m} \pmod q} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$ $(i = 1,2)$ — *двойные суммы Гаусса.*

Доказательство проводится круговым методом с использованием оценки А. Вейля [1] для суммы Клоостермана.

Остаточный член асимптотической формулы в теореме 1 можно улучшить, используя оценку Х.Иванца [2] для суммы сумм Клоостермана.

Теорема 2. *Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F, $2 \nmid \delta_F$, h – натуральное число, такое, что $\delta_F \mid h$, $h \le n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{7/12+\varepsilon}).$$

В случае, когда квадратичные формы $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$ принадлежат одному классу, условие $2 \nmid \delta_F$ в формулировке теоремы 2 можно снять. В частности, справедлива

Теорема 3. *Пусть ε — произвольное положительное число, $n \in N$, h — натуральное число, такое, что $4 \mid h$, $h \ll n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2=h} e^{-\frac{m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2}{n}} = \frac{\pi^2 n}{2}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} S^2(q,l,0) S^2(q,-l,0) + O(n^{7/12+\varepsilon}),$$

где $S(q,l,0)=\sum\limits_{s=1}^{q}\exp(2\pi i l s^2/q)$ *— сумма Гаусса.*

Вторым основным результатом являются асимптотические формулы дробных моментов некоторых рядов Дирихле.

Теорема 4. *Пусть* m *— натуральное число,* $\Phi(T)$ *— сколь угодно медленно стремящаяся к* $+\infty$ *при* $T\to+\infty$ *функция. Тогда при* $\frac{1}{2}+\frac{\Phi(T)}{\ln T}\le\sigma<1$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\int\limits_{T}^{2T}|\zeta(\sigma+it)|^{2/m}dt=T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}}+O\left(T(\sigma-1/2)^{-1/m^2}e^{-0,1\Phi(T)}\right),$$

где $d_k(n)$ *– коэффициенты разложения функции* $\zeta^k(s)$ *в степенной ряд.*

Наша формула справедлива при весьма близких к $1/2$ значениях σ и в этом смысле представляет собой уточнение результата И.Ш. Джаббарова [3].

В 1989 году А. Сельберг [4] определил класс рядов Дирихле $L(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$, $(\Re s>1)$ удовлетворяющих некоторым условиям и высказал ряд гипотез.

Получение асимптотических формул для моментов функций Сельберга представляет трудность потому, что в отличие от $\zeta(s)$ точная верхняя оценка дробных моментов для таких функций на критической прямой не известна.

Теорема 5. *Пусть* $\sum\limits_{n\le x}|a(n)|^2n^{-1}=\log x+O(1)$, *где* $a(n)$ *– коэффициенты Дирихле функции* $L(s)$ *степени 2. Пусть* m *— натуральное число,* $\Phi(T)$ *— сколь угодно медленно стремящаяся к* $+\infty$ *при* $T\to+\infty$ *функция. Тогда при* $\frac{1}{2}+\frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}\le\sigma<1$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\int\limits_{T}^{2T}|L(\sigma+it)|^{2/m}dt=T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d_{1/m}(n)a(n)|^2}{n^{2\sigma}}+O\left(Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\right).$$

Литература

1. Estermann T. On Kloostermann's sum // Mathematika. – 1961. – №8. – P.83-86.

2. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms // Invent. math. – 1982. – №70. – P.219-288.

3. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ-функции // Математические заметки. – 1985. – 38(4). – C.481-493.

4. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno. – 1992. – P.365-387.