MSC 35S35

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ НА ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ [1)]

Л.А. Ковалева, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Теории эллиптических уравнений на стратифицированных множествах посвящены многочисленные исследования (см., например, [1]). Качественное исследование краевых задач на этих множествах основано на применении векторных дифференциальных операций с помощью надлежащего определения меры. В данной работе рассматриваются гармонические функции на двумерных стратифицированных множествах Ω, которые для простоты предполагаются комплексами. В ней предлагается теоретико функциональный подход к исследованию задачи Дирихле для этих функций, основанный на ее сведении к так называемой нелокальной задаче Римана[2] для аналитических функций.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ попарно непересекающиеся открытые отрезки $\Omega^1_j,\ 1 \leq j \leq l$, и открытые плоские выпуклые многоугольники $\Omega^2_j,\ 1 \leq j \leq n$. Граница каждого многоугольника составлена из попарно непересекающихся сторон (открытых отрезков) и вершин. Предполагается, что эти границы попарно могут пересекаться только по сторонам или вершинам, причем семейство (Ω^1_j) составлено из различных сторон. Множество всех вершин обозначим F. Полученный двумерный комплекс

$$\overline{\Omega} = F \cup \Omega^1 \cup \Omega^2, \quad \Omega^k = \cup_j \Omega^k_j,$$

называется стратифицированным компактом, а составляющие его элементы Ω^1_k и Ω^2_s – стратами соответствующих размерностей. Под стратифицированным множеством Ω здесь понимается $\Omega^2 \cup \Omega^1_{(1)}$, где $\Omega^1_{(1)}$ – обьединение некоторого числа одномерных страт. Обьединение $\Omega^1_{(0)}$ оставшихся одномерных страт будет играть роль границы этого множества. Случай, когда одно из множеств $\Omega^1_{(0)},\ \Omega^1_{(1)}$ является пустым, не исключается. К каждому одномерному страту сходится один или несколько многоугольников Ω^2_s, в первом случае его называем стороной, во втором случае – ребром. Предполагается, что все ребра входят только в $\Omega^1_{(1)}$. Ниже на Ω естественным образом вводится понятие гармонической функции, для которой $\Omega^1_{(0)}$ будет являться носителем данных Дирихле.

Пусть m^2_s есть число сторон, составляющих границу $\partial\Omega^2_s$ и $m = m^2_1 + \ldots + m^2_n$. Все эти стороны занумеруем единым образом в виде $L_1, \ldots, L_m$ и рассмотрим разбиение $I^2 = \{I^2_s, 1 \leq s \leq n,\}$ множества $\{1, \ldots, m\}$, для которого стороны $L_j, j \in I^2_s$, составляют границу $\partial\Omega^2_s$. С каждым одномерным стратом Ω^1_k можно также связать некоторое

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357).

множество I_k^1 номеров j, для которых L_j совпадает с Ω_k^1, число элементов этого множества обозначим m_k^1. В результате получаем другое разбиение $I^1 = \{I_k^1, 1 \le k \le l,\}$ множества $\{1, \dots, m\}$. Рассмотрим еще семейство единичных векторов $\nu_j \in \mathbb{R}^3$, $1 \le j \le m$, таких, что для $j \in I_s^2$ вектор ν_j лежит в плоскости многоугольника Ω_s^2 и по отношению к нему является внутренней нормалью к стороне L_j.

По определению функция $u \in C(\Omega)$ называется гармонической на Ω, если для каждого s ее сужения u_s гармоничны (по отношению к некоторой, а значит, и любой прямоугольной декартовой системы координат) на двумерном страте Ω_s^2, непрерывно дифференцируемы вплоть до $\Omega_{(1)}^1 \cap \partial\Omega_s^2$ и ее нормальные производные

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_j^+ = \frac{\partial u_s}{\partial \nu_j}, \quad j \in I_s^2,$$

подчинены условию

$$\sum\nolimits_{j \in I_k^1} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_j^+ = 0, \quad \Omega_k^1 \subseteq \Omega_{(1)}^1.$$

Как обычно, задача Дирихле состоит в отыскании гармонической на Ω функции u, принимающей на $\Omega_{(0)}^1$ заданные значения.

Эта задача рассматривается в классе Гельдера $H(\overline{\Omega})$, а также в классе $\dot{H}(\overline{\Omega}, F)$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера вне любой окрестности F и в точках $\tau \in F$ допускающих особенности логарифмического характера. Показано, что задача Дирихле фредгольмова в каждом из этих классов. Индекс этой задачи описан в терминах так называемого концевого символа - семейства аналитических матриц- функций $X_\tau(\zeta)$, $\tau \in F$. Здесь X_τ – матрица порядка $2m_\tau$, где m_τ – число двумерных страт, имеющих τ своей вершиной, которая зависит только от геометрической структуры множества Ω и выбора $\Omega_{(0)}^1$.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

2. Солдатов А.П. Общая краевая задача теории функций // Докл. АН СССР. – 1988. – 299, №.4. – С.825-828.