MSC 76T10

УСРЕДНЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ [2)]

Св.А. Гриценко, Н.С. Ерыгина

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru,erygina@bsu.edu.ru

Исследуется задача о фильтрации жидкости из водоема в твердый пористый грунт. Доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи. Выполняется усреднение системы уравнений. Пусть – $Q \subset \mathbb{R}^3$ – вся рассматриваемая область, которая включает в себя верхнюю часть, Ω^0 – водоем, нижнюю часть Ω – пористый скелет и их общую границу S_0: $Q = \Omega^0 \cup S^0 \cup \Omega$.

Движение жидкости в Ω^0 при $t > 0$ описывается нестационарной системой уравнений Стокса

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbb{P}_f + \varrho_f \boldsymbol{e} = 0, \quad \mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I}, \tag{2}$$

а совместное движение упругого скелета и жидкости в Ω при $t > 0$ описывается уравнением неразрывности (1), уравнением сохранения моментов

$$\operatorname{div} \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \boldsymbol{e} = 0, \tag{3}$$

и уравнением состояния

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1 - \chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}, \tag{4}$$

где $\varrho^\varepsilon = \varrho_f \chi^\varepsilon + \varrho_s (1 - \chi^\varepsilon)$.

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ при $t > 0$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t), \tag{5}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}} \mathbb{P}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \mathbb{P}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0). \tag{6}$$

На верхней грани области Ω_0 при $t > 0$ задается условие Неймана

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n}, \tag{7}$$

а на остальной части внешней границы S при $t > 0$ — условие Дирихле

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{8}$$

[2]Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0357.

Задача замыкается начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega\bigcup\Omega_f^{\varepsilon}. \tag{9}$$

В (1)-(9) характеристическая функция $\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ области Ω_f^{ε} определяется выражением

$$\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})=(1-\zeta)\chi\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big),$$

где $\zeta=\zeta(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция области Ω^0 в Q, $\chi(\boldsymbol{y})$ — характеристическая функция Y_f (жидкой части элементарной ячейки).

Теорема *Пусть функции $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon},\, p^{\varepsilon}\}$ – обобщенное решение задачи (1)-(9). Тогда при $\varepsilon\to 0$ последовательность $\{p^{\varepsilon}\}$ сходится слабо в $L_2\big((0,T);L_2(Q)\big)$ к функции p, а последовательность $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ сходится слабо в $L_2\big((0,T);W_2^1(Q)\big)$ к функции $\boldsymbol{w}$. Указанные предельные функции являются решением усредненной системы:*

$$\operatorname{div}\,\boldsymbol{w}=0, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\,\Big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-p\,\mathbb{I}\Big)+\varrho_f\,\boldsymbol{e}=0 \tag{11}$$

$$\operatorname{div}\,\widehat{\mathbb{P}}+\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}=0, \tag{12}$$

$$\widehat{\mathbb{P}}=-p\,\mathbb{I}+\mathfrak{N}_1:\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)+\mathfrak{N}_2:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\int_0^t\mathfrak{N}_3(t-\tau):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))d\tau \tag{13}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}}\Big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)-p(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}\Big)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \tag{14}$$

$$\Big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)-p(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}\Big)\cdot\boldsymbol{n}=-p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}, \tag{15}$$

$\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3(t)$ — *вычисляемые по определенным формулам тензоры 4 ранга.*

Литература

1. Meirmanov A.M. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163, №.2. – P111-172.