MSC 35Q05

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.В. Глушак, О. Покручин

Белгородский государственный университет,
ул.Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru,
pokru4in.oleg@yandex.ru

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k>0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=Au(t),\quad t>0, \tag{14}$$

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=0. \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть задача (14), (15) равномерно корректна, $A\in G_k$, и $u_0\in D(A)$. Тогда эта задача равномерно корректна и для $m>k$, то есть $A\in G_m$, при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t)$ имеет вид*

$$Y_m(t)u_0=\frac{2}{B(k/2+1/2,m/2-k/2)}\int_0^1(1-s^2)^{(m-k-2)/2}s^kY_k(ts)u_0\,ds, \tag{16}$$

где $B(a,b)$ — бета-функция Эйлера.

Теорема 2. *Если задача (14), (15) равномерно корректна и $Re\lambda>\omega$, то $\lambda^2\in\rho(A)$ и для любого $x\in E$ справедливо представление*

$$\lambda^{(1-k)/2}R(\lambda^2)x=\frac{2^{(1-k)/2}}{\Gamma((k+1)/2)}\int_0^\infty K_\nu(\lambda t)t^{(k+1)/2}Y_k(t)x\,dt. \tag{17}$$

Теорема 3. *Пусть задача (14), (15) равномерно корректна и пусть $Y_k(t)$ — ОФБ для этой задачи. Тогда оператор A является генератором C_0-полугруппы $T(t)$ и для этой полугруппы справедливо представление*

$$T(t)x=\frac{1}{2^k\Gamma((k+1)/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty s^k\exp(-s^2/(4t))Y_k(s)x\,ds,\quad x\in E. \tag{18}$$

Теорема 4. *Если задача (14), (15) равномерно корректна и $Re\lambda>\omega$, то λ^2 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, для дробной степени резольвенты справедливо представление*

$$R^{1+k/2}(\lambda^2)=\frac{\sqrt{\pi}\;2^{-k}}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)\lambda}\int_0^\infty t^k\exp(-\lambda t)Y_k(t)\,dt \tag{19}$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right)\right\|\le\frac{\sqrt{\pi}\;2^{-k}\;M\;\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k/2+1)\;\Gamma(k/2+1/2)\;(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{k+n+1}},\quad n=0,\;1,\;2,... \tag{20}$$