MSC 93B99

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.В. Флоринский

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: flor@bsu.edu.ru

Рассматривается линейная задача быстродействия с двумерным управлением:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2, \qquad |u_1| \le 1, \qquad |u_2| \le 1, \\ &x(0) = x_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min . \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ - управления, переводящие точку x_0 в 0. Обозначим через $M_1(\Theta)$ множество точек вида

$$v_0 = -\int\limits_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

а через $M_2(\Theta)$ – множество точек вида

$$w_0 = -\int\limits_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau.$$

Множества $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ являются выпуклыми, содержащими 0 в качестве внутренней точки.

Очевидно, что множество $M_1(\Theta)$ является областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1, \qquad |u_1| \le 1, \tag{2}$$

а множество $M_2(\Theta)$ - областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_2 u_2, \qquad |u_2| \le 1. \tag{3}$$

Рассмотрим множество $M_3(\Theta) = x_0 - M_2(\Theta)$. Оно является выпуклым, содержащим x_0 в качестве внутренней точки. Так как области управляемости $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ удовлетворяют условиям:$M_1(\Theta_1) \subset M_1(\Theta_2)$ и $M_2(\Theta_1) \subset M_2(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$, то и $M_3(\Theta_1) \subset M_3(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357 от 6 августа 2012г.)

Теорема. *Пусть для задачи (1) выполнены следующие условия:*

$$\operatorname{rank}(b_1, Ab_1, ..., A^{n-1}b_1) = n \text{ и } \operatorname{rank}(b_2, Ab_2, ..., A^{n-1}b_2) = n.$$

Тогда для того, чтобы время быстродействия Θ для задачи (1) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ было непустым и не содержало внутренней точки.

Таким образом, время быстродействия Θ должно быть таким, чтобы множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ имели общую граничную точку $\hat{x}_0$. В этой точке существует (возможно не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Следовательно, в этой точке существуют опорные векторы к множествам $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$. Отсюда следует, что решение задачи быстродействия (1) сводится к решению следующих задач быстродействия:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + b_1 u_1, \quad |u_1| \leq 1, \\ &x(0) = \hat{x}_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min. \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + b_2 u_2, \qquad |u_2| \leq 1, \\ &x(0) = x_0 - \hat{x}_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min. \end{aligned} \tag{5}$$

и нахождению такой точки $\hat{x}_0$, что время быстродействия Θ будет являться общим как для задачи (4), так и для задачи (5) и оно же будет временем быстродействия для задачи (1).

Для каждой из задач (4) и (5) время быстродействия, род управления и моменты переключения оптимального по быстродействию управления можно находить методом, основанном на применении min-проблемы моментов Маркова, предложенном В.И. Коробовым и Г.М. Скляром [1,2].

Построены численные методы решения задачи (1), основанные на применении min-проблемы моментов Маркова.

Литература

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сборник. – 1987. – 134(176), № 2(10). – С.186-206.

2. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем // Математическая физика, анализ, геометрия. – 6, №3/4. – С.264-287.