MSC 60J70

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СЛУЧАЙНОМ СТОХАСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ БЕЛОГО ШУМА

Л.Т. Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Рассматривается стохастическая динамическая система [1], описывающая движение $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{v}}(t), \tilde{\mathbf{M}}(t)\rangle$ во внешнем случайно изменяющемся магнитном поле $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ частицы, которая обладает как электрическим зарядом, так и собственным магнитным моментом. Здесь $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ – радиус-вектор случайного положения частицы, $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ – ее скорость и $\tilde{\mathbf{M}}(t)$ – магнитный момент в момент времени t. Знак «тильда» над символами указывает на то, что соответствующие функции являются случайными. Стохастические дифференциальные уравнения динамической системы, в пренебрежении релятивистским изменением массы частицы и ее торможением, которое связано с собственным излучением, имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) \\
\dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) &= \frac{e}{mc}\,[\tilde{\mathbf{v}}(t), \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)] + \\
&+\Big([\tilde{\mathbf{M}}(t), [\nabla, \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t))]] + (\tilde{\mathbf{M}}(t), \nabla)\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t))\Big)\,, \\
\dot{\tilde{\mathbf{M}}}(t) &= g[\tilde{\mathbf{M}}(t), \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)]\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

в котором случайное поле $\{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\}$ играет роль мультипликативного шума [2].

Относительно статистических свойств случайного поля $\{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\}$ предполагается, что оно – гауссовское с нулевым средним значением $\langle\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\rangle = 0$. Корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = \langle \tilde{\mathbf{B}}_i(\mathbf{x}, t)\tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{x}, t)\rangle$, полностью характеризующая, в этом случае, поле $\{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\}$ обладает свойствами стохастической трансляционной инвариантности и временно́й однородности. Кроме того, полагается, что это поле имеет спектральную плотность, по определению пропорциональную

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{B}_i(\mathbf{x}, t)\tilde{B}_j(\mathbf{y}, s)\rangle \exp(i\omega(t-s))dt$$

не зависит от частоты ω. Эти предположения приводят к следующему общему виду корреляционной функции

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = \delta(t-s)(\nabla_i\nabla_j - \delta_{ij}\Delta)D(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\,,$$

где функция $D(z)$ является положительно определенной. Существенно, что в указанной форме корреляционной функции учтено также, что случайные реализации $\tilde{B}_i(\mathbf{x}, t)$ соленоидальны, $\nabla_i \tilde{B}_i(\mathbf{x}, t) = 0$. δ-функционная зависимость от времени корреляционной функции $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$ позволяет утверждать [2], многомерный случайный процесс, порождаемый решениями системы стохастических дифференциальных уравнений (1), является марковским диффузионным процессом. Поэтому его плотность условных вероятностей перехода, полностью его определяющая с точностью до вероятности входа в процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению Колмогорова – многомерному параболическому уравнению второго порядка. В работе вычислена, в терминах функции D, матрица коэффициентов квадратичной формы, определяющая это дифференциальное уравнение. В силу стохастической трансляционной инвариантности поля $\{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\}$, эта матрица оказывается постоянной, то она не зависит от пространственной точки положения частицы.

Литература

1. Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, 2d ed.– Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1985.

2. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions.– Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 398 pp.