MSC 76T10

УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ИЗ ВОДОЕМА В ГРУНТ

Н.С. Ерыгина

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: erygina n@bsu.edu.ru

Исследуется задача о фильтрации жидкости из водоема Ω^0 в твердый пористый грунт Ω. Пусть $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$, $Q = \Omega^0 \cup\ S \cup \Omega$. Вектор перемещений $w(x,t)$ и давление $p(x,t)$ при $t > 0$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в Q

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{1}$$

$$\tau_0 \varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \Big(\zeta \mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P} \Big), \tag{2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I} \tag{3}$$

в смысле теории распределений, дополненной следующими краевыми и начальными условиями:

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x} \in S^1 \subset \partial Q, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in S^2 = S \backslash S^1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x} \in Q. \tag{6}$$

Здесь $\zeta = \zeta(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция области Ω^0, $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(x/\varepsilon)$ — характеристическая функция порового пространства Ω^ε_f и $\chi(\boldsymbol{y})$ — 1-периодическая функция, определяющая структуру порового пространства.

Теорема 1. *Пусть* $\mu_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha_\mu(\varepsilon)$, $\mu_1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha_\mu/\varepsilon^2$, $\lambda_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lambda(\varepsilon)$ *и выполнены следующие предположения:*

$$p_0(x,0) = 0, \quad \mu_0 = 0, \quad 0 < \lambda_0, \quad \tau_0 < \infty, \quad \mu_1 = \infty$$

и

$$\int_{Q_T} \Big(\Big| \frac{\partial p_0}{\partial t} \Big|^2 + \Big| \nabla p_0 \Big|^2 + \Big| \nabla \big(\frac{\partial p_0}{\partial t} \big) \Big|^2 \Big) dxdt = F^2 < \infty. \tag{7}$$

Тогда, для всякого $\varepsilon > 0$ *существует единственное обобщенное решение* w^ε , p^ε *задачи (1)–(6) и предельные функции* $\boldsymbol{w} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{w}^\varepsilon$, $\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{w}/\partial t$, $p = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} p^\varepsilon$ *удовлетворяют следующей начально-краевой задаче*

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \varrho_f \boldsymbol{e},\ \ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,\ \ x \in \Omega_0\,, \tag{8}$$

$$\tau_0 \hat{\varrho} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\varrho},\, \boldsymbol{e}, \;\; x \in \Omega \,, \tag{9}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)} = \lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I} \,, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \;\; x \in \Omega \,, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{w} = 0, \;\; x \in S^2 \,, \tag{12}$$

$$p(x,t) = p_0(t), \;\; x \in S_0^1 = S^1 \cap \overline{\Omega_0} \,, \tag{13}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)}(x,t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0) = -p_0(t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0), \;\; x \in S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega} \,, \tag{14}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \,, \tag{15}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = - \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} p(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \,, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0, \; \boldsymbol{x} \in Q \,. \tag{17}$$

В (8)-(13) $\boldsymbol{n}(x^0)$ – единичный вектор нормали к S^1 в точке $x^0 \in S^0$,

$$\hat{\varrho} = m\varrho_f + (1-m)\varrho_s, \quad m = \int_Y \chi(y)dy,$$

$\mathfrak{N}_0^s$ – строго симметричный положительно определенный тензор четвертого ранга, который определяется из решения вспомогательной задачи на элементарной ячейке, заданной функцией $\chi(\boldsymbol{y})$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, пусть $\tau_0 = 1/n$ и $p^{(n)}$, $\boldsymbol{w}^{(n)}$ — обобщенное решение задачи (8)—(13). Тогда предельные функции $\boldsymbol{w} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{w}^{(n)}$, $p = \lim\limits_{n\to\infty} p^{(n)}$ удовлетворяют следующей начально-краевой задаче*

$$p(\boldsymbol{x},t) = p^0(t) - \varrho_f x_3 \equiv p_0(\boldsymbol{x},t), \;\; x \in \Omega_0, \tag{18}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\varrho}\; \boldsymbol{e} = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{19}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -p_0(\boldsymbol{x}^0,t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \;\; x \in S^0, \tag{20}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)}(x,t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0) = -p_0(t) \cdot \boldsymbol{n}(x^0), \;\; x \in S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0, \; \boldsymbol{x} \in S^2, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0, \; \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{23}$$