MSC 60G60

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

***А.Я. Дульфан, **Ю.П. Вирченко**

Харьковский политехнический университет,
ул. Фрунзе, Харьков, Украина

**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Сепарабельное случайное поле $\tilde{a}(\boldsymbol{x})$ на $\mathbb{R}^d$ называется *самоподобным* (*автомодельным*), если если при любом $\lambda > 0$ оно стохастически эквивалентно, случайному полю $\mu(\lambda)\tilde{a}(\lambda\boldsymbol{x})$. В этом случае маргинальные плотности распределения f_n случайного поля $\tilde{a}(\boldsymbol{x})$ обладают свойством

$$(\mu(\lambda))^n f_n(\mu(\lambda)a_1, \lambda\boldsymbol{x}_1 ; \mu(\lambda)a_2, \lambda\boldsymbol{x}_2 ; \ldots ; \mu(\lambda)a_n, \lambda\boldsymbol{x}_n) = $$
$$= f_n(a_1, \boldsymbol{x}_1 ; a_2, \boldsymbol{x}_2 ; \ldots ; a_n, \boldsymbol{x}_n) . \qquad (1)$$

Очевидно, что функция $\mu(\lambda)$ в этом случае должна обладать групповым свойством

$$\mu(\lambda_1\lambda_2) = \mu(\lambda_1)\mu(\lambda_2) ,$$

что приводит к ее явному виду $\mu(\lambda) = \lambda^c$, где показатель c является характеристикой, самоподобных случайных полей.

На явление самоподобия некоторых случайных процессов было обращено внимание в [1], а термин *автомодельное случайное поле* был предложен в [2]. Эти поля являются естественным обобщением на бесконечномерный случай довольно хорошо исследованных в теории вероятностей случайных величин с устойчивыми законами распределения. Их особое положение и важность их исследования и классификации связана с тем, что они возникают при описании критического поведения в статистической механике и их автомодельность проявляется в виде так называемой ренорм-группы. При этом, однако, важным является то, что помимо автомодельности такие поля должны обладать стохастической трансляционной инвариантностью. В этом случае они не могут быть сепарабельными полями и оказываются с необходимостью обобщенными [3].

Если не требовать наличия стохастической трансляционной инвариантности, то самоподобные поля образуют довольно обширный класс. В частности, в одномерном случае $d = 1$, когда требование самоподобия (1) проявляется в наиболее жестком виде, чем при размерностях $d > 1$, они могут быть поставлены во взаимнооднозначное соответствие со стационарными случайными процессами.

В одномерном случае положим $\ln \lambda = \tau$ и $\ln x = t$ при $x > 0$ так, что индуцированный случайный процесс $\tilde{a}\left(e^t\right)$ имеет маргинальные плотности распределения

$$g_n(a_1, t_1 ; \ldots ; a_n, t_n) = f_n\left(a_1, e^{t_1} ; \ldots ; a_n, e^{t_n}\right) ,$$

которые, согласно (1), обладают свойством

$$e^{c\tau n} g_n\left(e^{c\tau} a_1, t_1 + \tau\,; \ldots\,; e^{c\tau} a_n, t_n + \tau\right) \;=\; g_n(a_1, t_1\,; \ldots\,; a_n, t_n)\,. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что процесс $\tilde{b}(t) = e^{-ct}\tilde{a}\left(e^t\right)$ обладает маргинальными плотностями $h_n(b_1, t_1\,; \ldots\,; b_n, t_n)$, которые следующим образом связаны с плотностями g_n:

$$\begin{aligned} h_n(b_1, t_1\,; \ldots\,; b_n, t_n) \;&=\; \langle \delta(b(t_1) - b_1) \ldots \delta(b(t_n) - b_n)\rangle \;= \\ &=\; \left\langle \delta\left(e^{-ct_1} a\left(e^{t_1}\right) - b_1\right) \ldots \delta\left(e^{-ct_n} a\left(e^{t_n}\right) - b_n\right)\right\rangle = \\ &=\; \exp\left(c(t_1 + \ldots + t_n)\right) g_n\left(b_1 e^{ct_1}, t_1\,; \ldots\,; b_n e^{ct_n}, t_n\right) \end{aligned}$$

и, следовательно, подчинены соотношению

$$\begin{aligned} &h_n(b_1, t_1 + \tau\,; \ldots\,; b_n, t_n + \tau) \;= \\ &=\; e^{c\tau n} \exp\left(c(t_1 + \ldots + t_n)\right) g_n\left(b_1 e^{c(t_1+\tau)}, t_1 + \tau\,; \ldots\,; b_n e^{c(t_n+\tau)}, t_n + \tau\right) \;= \\ &=\; \exp\left(c(t_1 + \ldots + t_n)\right) g_n\left(b_1 e^{ct_1}, t_1\,; \ldots\,; b_n e^{ct_n}, t_n\right) \;=\; h_n(b_1, t_1\,; \ldots\,; b_n, t_n) \end{aligned}$$

с произвольным значением параметра τ. Следовательно, процесс $\tilde{b}(t)$ является стационарным.

Проведенные рассуждения, очевидным образом, справедливы и в обратном направлении. Взяв произвольный сепарабельный стационарный процесс $\tilde{b}(t)$, который определяется многоточечными плотностями h_n и построив по нему процесс $\tilde{a}(t)$, преобразуя его траектории по формуле $\tilde{a}(e^t) = e^{ct}\tilde{b}(t)$, получим, что этот процесс является самоподобным с показателем c. Очевидно, что согласно приведенному построению процесс $\tilde{b}(t)$ должен быть марковским в том случае, если процесс $\tilde{a}(t)$ – марковский и указанные формулы связи распространяются на их плотности условных вероятностей перехода. В частности, типичным представителем самоподобного марковского случайного процесса является *винеровский процесс*, у которого $c = 1/2$ и плотность условных вероятностей перехода

$$f(a, t; a', t') \;=\; \left(2\pi\sigma(t - t')\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(a - a')^2}{2\sigma(t - t')}\right)\,, \quad t > t', \sigma > 0\,.$$

Соответствующим ему согласно предложенной конструкции стационарный марковским процессом является процесс Орнштейна-Уленбека (с декрементом 1/2), обладающий плотностью условных вероятностей перехода

$$h(b, t; b', t') \;=\; \left(2\pi\sigma\left(1 - e^{(t'-t)}\right)\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(b - b'e^{(t'-t)/2})^2}{2\sigma\left(1 - e^{(t'-t)}\right)}\right)\,.$$

Литература

1. Колмогоров А.Н., Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1940/ – 26, №2. – С.115-118.

2. Синай Я.Г. Автомодельные распределения вероятностей // Теория вероятностей и её применения. – 1976. – 21, №1. – С.63-80.

3. Добрушин Р.Л. Автомодельность и ренорм-группа обобщённых случайных полей // в сб. «Многокомпонентные случайные системы». – М.: Наука. – С.179-213.