MSC 74A25

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА МЕДЛЕННОЙ ФРАГМЕНТАЦИИ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ ДРОБЛЕНИЯ

***Р.Е. Бродский, **Ю.П. Вирченко**

*Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: r.brodskii@gmail.com

**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Изучается математическая модель фрагментации хрупкого твердотельного материала, протекающей в естественных природных условиях. Такой процесс, физически, является очень медленным. Ставится и решается задача об определении финального распределения вероятностей размеров образующихся, в результате такого процесса, фрагментов. В конструкции математической модели заложены следующие принципы: 1) масштабная инвариантность процесса актов дробления фрагментов с различными размерами, 2) среднее время поступления в систему энергии, существенно изменяющей состояние всех фрагментов в целом, намного превосходит все другие времена, характерные для процесса фрагментации, 3) вся поступающая в систему энергия в единицу времени затрачивается на образование новых поверхностей фрагментов и пропорциональна суммарной образующейся за то же время площади поверхности, 4) полный объем всех фрагментов сохраняется с течением времени.

В качестве единой числовой характеристики каждого из фрагментов системы выбирается обобщенный «размер» как исходного образца материала r, так и образующихся из него осколков $\rho_1 ... \rho_n$. В рамках этих предположений выводится эволюционное кинетическое уравнение для плотности $g(r,t)$ числа фрагментов размера r в момент времени t. Оно записывается в виде [1]

$$\dot{g}\left(r,t\right) = \int\limits_{r}^{\infty} K\left(r,\rho;t\right) g\left(\rho,t\right) d\rho - \mu\left(r,t\right) g\left(r,t\right) \ . \tag{1}$$

В условиях медленности фрагментации его решения аппроксимируются решениями диффузионного уравнения типа Фоккера-Планка с переменными коэффициентами.

$$\frac{\partial g\left(r,t\right)}{\partial t} = \gamma\left(r,t\right) g\left(r,t\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(a\left(r,t\right) g\left(r,t\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(b^2\left(r,t\right) g\left(r,t\right)\right) \ . \tag{2}$$

Функции $a(r,t), b(r,t), \gamma(r,t)$ определяются из условий сохранения полных объёма и энергии системы. Кроме того, предполагается, что асимптотически при большой длительности протекания процесса имеет место $\gamma(r,t) \sim \gamma(t)c(r)$ и существенно поведение функции $c(r)$ только при малых значениях r, которое, по предположению, имеет вид $c(r) = c_0 r^\beta$ $\beta > 0$.. В результате, приходим к следующему уравнению

$$\frac{\partial g(r,s)}{\partial s} = r^\beta g(r,s) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\beta+1} g(r,s)\right) + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^{2+\beta} g(r,s)\right), \tag{4}$$

описывающему процесс медленной фрагментации, в котором введена новая шкала времени s на основе дифференциального соотношения $ds = \gamma(t)dt$ и введена безразмерная размер $rc_0^{1/\beta} \Rightarrow r$. В работе вычислена финальная плотность распределения – асимптотика $g(r,s)$ при $s \to \infty$ для частного случая, соответствующего квадратичному закону дробления $\beta = 2$. Заметим, что изучаемый нами случай существенно отличается от классического случая, рассмотренного Колмогоровым, который в рамках описанного подхода проявляется при $c(r) \to c > 0$, если $r \to 0$ [2], когда финальная плотность распределения имеет логарифмически-нормальный вид.

Вычисление асимптотики функции $g(r,s)$ осуществляется на основе явного решения задачи Коши на полуоси для уравнения (4) посредством преобразования Лапласа по времени s

$$h(r,\sigma) = r^{11/2}\int_0^\infty e^{-\sigma s} g(r,s)\,ds\,.$$

Уравнение (4) сводится к уравнению Бесселя

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 h(x^{-1},\sigma)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial h(x^{-1},\sigma)}{\partial x} - \left(\frac{1}{4x^2}+\sigma\right) h\left(x^{-1},\sigma\right)\right) = -x^{-11/2} g\left(x^{-1},0\right)\,,$$

где $x = r^{-1}$. Его решение явно выписывается на основе функций Бесселя полуцелого индекса. Это позволяет получить явный вид решения задачи Коши для уравнения (4), которое в том случае, когда эволюция начинается с единственного исходного фрагмента размера r_0, то есть $g(r,0) = \delta(r - r_0)$ приводит к следующей формуле для финальной плотности распределения

$$g(r,s) = C(s)\, r^{-6}\exp\left[-\frac{3r_*^2}{2sr^2}\right]\,, \qquad C(s) = 6\sqrt{\frac{3}{2\pi s^3}}\; r_0^2 r_*^3 \theta(r_0 - r)\,,$$

где произведен переход $r \Rightarrow r/r_*$, $r_* = c_0^{-1/2}$ от безразмерной переменной к исходной переменной размера. В заключение заметим, что плотность $g(r,s)$ не является плотностью распределения вероятностей, так как она, по своему смыслу, нормирована на полное число фрагментов $N(t)$ в момент времени t.

Литература

1. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. The Kolmogorov equation in the stochastic fragmentation theory and branching processes with infinite collection of particle types // Absract and Applied Analysis. – 2006. – Art.ID 36215. – P.1-10.

2. Колмогоров А.Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. -– 1941. -– 31, 2. -– С.99-101.