MSC 60K20

ЗАДАЧА ДОСТИЖЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ФУНКЦИОНАЛОМ ДЛЯ ДИХОТОМИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

М.И. Абрамова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: abramova_m@bsu.edu.ru, virch@bsu.edu.ru

Рассматривается задача о распределении вероятностей $Q(t,E)$ для времени достижения $\tilde{\tau}(E)$ заданного уровня E энергетическим функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta})$ в случае, когда интенсивность $\alpha\tilde{\zeta}(t) = d\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta})/dt$, $\alpha > 0$ представляется дихотомическим марковским случайным процессом $\langle\tilde{\zeta}(t); t \geq 0\rangle$ с кусочно постоянными траекториями, принимающими значения $\{0,1\}$. Точки изменения траекторий таких случайных процессов образуют пуассоновский поток.

Математическая модель процесса накопления энергии для этого случая описывается формулой

$$\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta}) = \alpha \int\limits_0^t \tilde{\zeta}(s)\, ds\,. \tag{1}$$

Решение задачи о вычислении распределения вероятностей $Q(x,t)$ для единственного с вероятностью единица случайного момента времени $\tilde{\tau}(E)$ достижения заданного уровня E функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta})$, определяемого интегралом

$$\tilde{\tau}(E) = \int\limits_0^\infty \theta\left(E - \alpha\int\limits_0^t \tilde{\zeta}(s)ds\right)\, dt\,, \tag{2}$$

$\theta(x) = \{1, x \geq 0; 0, x < 0\}$ основано на методе Каца-Фейнмана-Дынкина вычисления математических ожиданий, связанных с аддитивными функционалами от траекторий марковских процессов. В основе метода лежит вспомогательное дифференциальное уравнение для совместных вероятностей двух процессов ζ и ε, $Q_i(x,t) \equiv \Pr\{\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) \geq x, \tilde{\zeta}(t) = i\}$, определенных на $x \in \mathbb{R}_+$ так, что $Q(t,x) = Q_0(x,t) + Q_1(x,t)$. Для переходных вероятностей расширенного марковского процесса имеет место эволюционное уравнение

$$\dot{Q}_j(x,t) \;=\; -\alpha j Q_j'(x,t) \;+\; \nu\left[Q_{1-j}(x,t) \;-\; Q_j(x,t)\right]\,,\; j \in \{0,1\}, \tag{3}$$

где точка – производная по t, штрих – производная по x. Для вычисления вероятности $Q_j(x,t)$ ищется решение задачи Коши с начальными условиями $Q_i(x,0) = \Pr\{\tilde{\varepsilon}(0;\tilde{\xi}) \geq x,\ \tilde{\zeta}(0) = i\} = 0$, $i = 0,1$, $x > 0$. При этом, естественно, должно удовлетворяться граничное условие $Q_i(0,t) = 1/2$, $i = 0,1$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Решение задачи Коши позволяет найти интегральное представление для плотности $q(t,E) = dQ(x,t)/dt$.

Теорема 1. *Плотность распределения $q(t,E)$ случайного времени достижения уровня E функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\zeta})$ от траекторий дихотомического процесса определяется формулой*

$$q(t,E) = \alpha\frac{e^{-\nu t}}{4\pi i}\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} e^{k(E-t\alpha/2)}\left[\operatorname{ch}\omega(k)t + (\nu-\alpha k/2)\frac{\operatorname{sh}\omega(k)t}{\omega(k)}\right]\frac{dk}{k}\,, \tag{4}$$

где $\omega(k) = (\nu^2 + (\alpha k/2)^2)^{1/2}$ и

$$q(t,E) \; = \; \frac{d}{dt}Q(t,E) = \frac{d}{dt}\sum_j Q_j(t,E)\,.$$

Это интегральное представление выражается в терминах в терминах специальных функций.

Теорема 2. *Плотность распределения $q(t,E)$ определяется формулой*

$$q(t+E/\alpha,E) = \frac{1}{2}e^{-\nu E/\alpha}\Big[\delta(t) +$$
$$+\, e^{-\nu t}\theta(t)\left(\mathrm{I}_0\left(2\nu\sqrt{Et/\alpha}\right) + \sqrt{E/\alpha t}\;\mathrm{I}_1\left(2\nu\sqrt{Et/\alpha}\right)\right)\Big]\;,$$

где δ – функция Дирака,

$$\mathrm{I}_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\,,\quad \mathrm{I}_1(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}\,,\quad z\in\mathbb{C}$$

– модифицированные функции Бесселя, ν – плотность пуассоновского потока случайных точек изменения траекторий процесса $\tilde{\zeta}(t)$.

Литература

1. Дынкин Е.Б. Функционалы от траекторий марковских случайных процессов // Докл.АН СССР. – 1955. – Вып.104., №5. – С.691-694.

2. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике / М.: Мир, 1965.

3. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / М.: Наука, 1980.