MSC 35Q05

ВОЗМУЩЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ ПЕРЕМЕННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.Н. Бабаев, А.В. Глушак

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Пусть A — неограниченный замкнутый оператор и $k > 0$, а $B(t)$ — переменный, ограниченный сильно непрерывный оператор. В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = (A + B(t))u(t). \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \ \ u'(0) = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $A \in G_k, \ k \geq 0$, *а* $G(t, s)$ *— сильно непрерывный при* $t \geq s > 0$ *оператор, удовлетворяющий операторному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k^2-2k}{4t^2}G(t,s) - B(t)G(t,s) = \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial s^2} - \frac{k^2-2k}{4s^2}G(t,s) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$\frac{dG(t,t)}{dt} = \frac{1}{2}B(t), \quad \lim_{s\to 0} G(t,s)s^{(k-3)/4} = 0. \tag{4}$$

Тогда функция

$$u(t) = Y_k(t)u_0 + t^{-k/2}\int\limits_0^t G(t,s)s^{k/2}Y_k(s)u_0 ds \tag{5}$$

является решением задачи Коши (1), (2).

Класс G_k, операторная функция Бесселя $Y_k(t)$ и операторная функция $Z_1(t)$ были введены и рассмотрены в работах [1], [2].

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (3) *с условиями* (4) *эквивалентно интегральному уравнению*

$$H(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi} v(y,\eta)B(\sqrt{y})y^p \, dy + \int\int_{OBPA} v(z,y)B(\sqrt{y}+\sqrt{z})H(y,z) \, dydz, \tag{6}$$

где

$$y = \frac{1}{4}(t+s)^2, \quad z = \frac{1}{4}(t-s)^2, \ \ G(t,s) = (y-z)^{-p+\frac{1}{2}}H(y,z), \ \ p = \frac{k-1}{4},$$

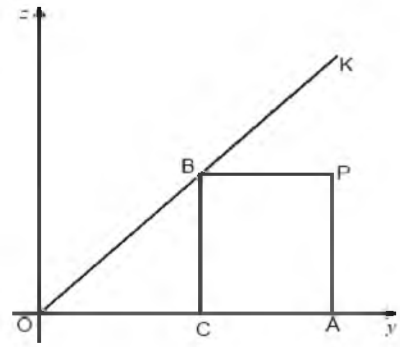

Рис. 1: Области интегрирования.

а функция $v(z,s)$ непрерывна внутри областей OBC и $CAPB$ (см. рис. 1) и задаётся формулами ($_2F_1$ — гипергеометрическая функция)

$$v(y,z) = (\eta - y)^{-\alpha}(z-\xi)^{-\alpha}(z-y)^{2\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\alpha,1,\frac{(y-\xi)(z-\eta)}{(y-\eta)(z-\xi)}\right) \text{ в области } CAPB,$$

$$v(y,z) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{(\Gamma(1-\alpha))^2}{\Gamma(2-2\alpha)}(\eta-\xi)^{1-2\alpha}(y-s)(z-\xi)^{\alpha-1}(\eta-y)^{\alpha-1} \times$$
$$\times\ {}_2F_1\left(1-\alpha,1-\alpha,2-2\alpha,\frac{(y-s)(\eta-\xi)}{(y-\eta)(z-\xi)}\right) \text{ в области } OBC.$$

Теорема 3. *Интегральное уравнение* (6) *имеет решение внутри области* $0<\eta<\xi$.

При доказательстве теорем 2 и 3 использовались результаты работ [3], [4].

Обозначим далее

$$J(t,s)u_0 = \begin{cases} (1-k)^{-1}\left(t^{1-k}s^kY_{2-k}(t)Y_k(s) - sY_k(t)Y_{2-k}(s)\right)u_0, \text{ для } k>0,\ k\neq 1; \\ s\left(Z_1(t)Y_1(s) - Y_1(t)Z_1(s)\right)u_0, \text{ для } k=1. \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть для* $s<t$ *справедлива оценка*

$$\|J(t,s)\| \le M(t-s)e^{\omega(t-s)}. \tag{8}$$

Тогда определяемая равенством (5) *функция* $u(t)$ *является единственным решением задачи Коши* (1), (2) *для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.*

Литература

1. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352. – № 5. – С.587-589.

2. Глушак А.В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Матем. заметки. – 1996. – 60, №3. – С.363-369.

3. Волк В.Я. Научные сообщения и задачи о формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при x=0 // Успехи математических наук. – 1953. – VIII, №4 (56) №6. – С.141-151.

4. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов. Математика. – 1986. – №6. – С.55–56.

5. Глушак А.В. Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Математические заметки. – 1999. – 66, №3. – С.364–371.