МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

О возмущении абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными

Глушак А.В., Авад Х.К.
Представлено академиком АМАН А.М. Нахушевым

В банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу типа Коши:

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + B(t)u(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, $D^{\alpha-1}u(t) = I^{1-\alpha}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)\,ds$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$ ($I^{1-\alpha}$ — тождественный оператор при $\alpha = 1$), $D^{\alpha}u(t) = \dfrac{d}{dt}I^{1-\alpha}u(t)$ — левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, A — линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, наконец, $B(t)$ — также линейный, замкнутый, плотно определенный, но уже переменный и, вообще говоря, неограниченный оператор, рассматриваемый как возмущение оператора A.

Условие 1. (i) $u_0 \in D(A)$ ($D(A)$ — *область определения оператора* A).
(ii) *Оператор A таков, что при некотором β, удовлетворяющем неравенству $\alpha \le \beta \le 1$, равномерно корректна задача*

$$D^{\beta}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0. \tag{4}$$

Пусть $T_\beta(t)$ — разрешающий оператор задачи (3), (4), *т.е.*, $u(t) = T_\beta(t)u_0$, *и при этом*

$$\|T_\beta(t)\| \le M_1\ t^{\beta-1}, \quad M_1 > 0. \tag{5}$$

Укажем, что при $0 < \beta < 1$ равномерная корректность задачи (3), (4) исследовалась в [1, 2, 3], а при $\beta = 1$ оператор A должен быть генератором C_0-полугруппы.

Условие 2. (i) *Оператор $B(t)$ имеет не зависящую от t область определения D и при этом* $D(A) \subset D$.
(ii) *Для любого $x \in D$ функция $D^{\alpha}B(t)x$ принадлежит $C((0,\infty), E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.*
(iii) *Для любого $x \in E$ существуют постоянные $\gamma \in (0,1)$, $M_2 > 0$ такие, что $T_\beta(\tau)x \in D$ (эффект сглаживания) и*

$$\|B(t)T_\beta(\tau)x\| \le \frac{M_2}{\tau^{\beta\gamma}}\|x\|, \quad t, \tau \in (0,\infty), \quad M_2 > 0. \tag{6}$$

Отметим, что если оператор $-A$ является сильно позитивным (терминология заимствована из [4]), т.е., если

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \le \frac{M_3}{1+|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0,\ M_3 > 0,$$

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07–01–00131

то в условии 1 можно взять $\beta = 1$, а неравенство (6) означает, что оператор $B(t)$ подчинен дробной степени $(-A)^{\gamma}$ (см. [4, с. 298]). Перестановочность операторов A и $B(t)$ не предполагается.

Условие 3. *Банахово пространство E обладает свойством Радона-Никодима* (*см.* [5, *с.* 15]).

Например, рефлексивные банаховы пространства обладают этим свойством, а пространства $L_1(a,b)$, $C[a,b]$, c_0 (пространство последовательностей, сходящихся к нулю) не обладают.

Как будет доказано в дальнейшем, условия 1 – 3 обеспечат однозначную разрешимость задачи (1), (2).

При доказательстве нами будет использована функция (см. [6, с. 357])

$$f_{\tau,\nu}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\left(tz - \tau z^{\nu}\right)\, dz, & t \geq 0, \\ 0, \quad t < 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\sigma > 0,\ \tau > 0,\ 0 < \nu < 1$ и ветвь функции z^{ν} выбрана так, что $\mathrm{Re}\ z^{\nu} > 0$ при $\mathrm{Re}\ z > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (7) обеспечивается множителем $\exp\left(-\tau z^{\nu}\right)$.

Если в интеграле, определяющем функцию $f_{\tau,\nu}(t)$, перейти от интегрирования по прямой $z = \sigma > 0$ к контуру, состоящему из двух лучей $z = r\exp\left(-i\theta\right)$ и $z = r\exp\left(i\theta\right)$, где $0 < r < \infty$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, то при $t > 0$ для функции $f_{\tau,\nu}(t)$ получится представление

$$f_{\tau,\nu}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(tr\cos\theta - \tau r^{\nu}\cos\nu\theta\right)\sin\left(tr\sin\theta - \tau r^{\nu}\sin\nu\theta + \theta\right)\, dr. \tag{8}$$

Функция $f_{\tau,\nu}(t)$ неотрицательна и имеет место представление

$$\exp\left(-\tau\lambda^{\nu}\right) = \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\lambda t\right) f_{\tau,\nu}(t)\, dt,\ \tau > 0,\ \lambda > 0,\ 0 < \nu < 1. \tag{9}$$

Теорема 1 [3]. *Пусть выполнены условия* 1, 3 *и* $\alpha < \beta$. *Тогда задача*

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{11}$$

равномерно корректна, и ее разрешающий оператор определяется формулой

$$T_{\alpha}(t)u_0 = \int\limits_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) T_{\beta}(\tau)u_0\, d\tau, \tag{12}$$

где $\nu = \alpha/\beta$, *а функция* $f_{\tau,\nu}\left(t\right)$ *определяется равенством* (7).

Сформулируем далее доказанную в [7] теорему о разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1, *а функция* $h(t) \in C\left(\left(0,\infty\right), E\right)$ *абсолютно интегрируема в нуле, принимает значения в* $D(A)$, $Ah(t) \in C\left(\left(0,\infty\right), E\right)$ *и также абсолютно интегрируема в нуле. Тогда неоднородная задача*

$$D^{\beta}u(t) = Au(t) + h(t), \quad t > 0, \tag{13}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0 \tag{14}$$

имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$u(t) = T_\beta(t)u_0 + \int\limits_0^t T_\beta\,(t-\xi)\,h(\xi)\;d\xi. \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $1-3$ *и* $\alpha < \beta \le 1$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \le \frac{M_1\;\Gamma(\beta)\;t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\|u_0\| +$$

$$+M_1\;M_2\;\Gamma(\beta)\;\Gamma(1-\beta\gamma)\;t^{\alpha+\nu(1-\beta\gamma)-1}\;E_{\nu(1-\beta\gamma),\alpha+\nu(1-\beta\gamma)}\left(M_2\;\Gamma(1-\beta\gamma)\;t^{\nu(1-\beta\gamma)}\right)\;\|u_0\|\,,$$

где $E_{\mu,\rho}(\cdot)$ — *функция типа Миттаг-Леффлера.*

Доказательство. Учитывая теоремы 1 и 2, сведем задачу (1), (2) к интегральному уравнению, которое в силу (12), (18) запишется в виде

$$u(t) = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\;d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)B(s)u(s)\;d\tau ds, \tag{16}$$

где $u_0,\;T_\beta(\tau)u_0 \in D(A) \subset D$, $\nu = \alpha/\beta$. Обозначив $w(t) = B(t)u(t)$, получим

$$w(t) = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\;d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)w(s)\;d\tau ds. \tag{17}$$

Для решения интегрального уравнения (17) применим метод последовательных приближений, положив

$$w_0(t) = 0,\quad w_1(t) = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\;d\tau,$$

$$w_{n+1}(t) = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\;d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)w_n(s)\;d\tau ds,\quad n\in N.$$

Используя неравенство (6), оценим норму разности

$$\|w_2(t)-w_1(t)\| \le \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\,\|B(t)T_\beta(\tau)w_1(s)\|\;d\tau ds \le$$

$$\le M_2^2\,\|u_0\| \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\beta\gamma}\int\limits_0^\infty f_{\xi,\nu}(s)\xi^{-\beta\gamma}\;d\xi d\tau ds. \tag{18}$$

Учитывая определение функции $f_{\xi,\nu}(s)$ равенством (7), а также интегралы 2.3.4.1, 2.3.3.4 [8], получим

$$\int\limits_0^\infty f_{\xi,\nu}(s)\xi^{-\beta\gamma}\;d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zs}\;dz\int\limits_0^\infty \xi^{-\beta\gamma}\exp\left(-\xi z^\nu\right)\;d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\beta\gamma)}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zs} z^{-\nu(1-\beta\gamma)}\, dz = \frac{\Gamma(1-\beta\gamma)}{\Gamma(\nu(1-\beta\gamma))} s^{\nu(1-\beta\gamma)-1}, \quad s>0. \tag{19}$$

Дважды применяя равенство (19) в (18) и вычисляя полученный интеграл, будем иметь

$$\|w_2(t)-w_1(t)\| \le \frac{M_2^2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\,\|u_0\|}{\Gamma(\nu(1-\beta\gamma))} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\beta\gamma} s^{\nu(1-\beta\gamma)-1}\, d\tau ds =$$

$$= \frac{M_2^2\,\Gamma^2(1-\beta\gamma)\,\|u_0\|}{\Gamma^2(\nu(1-\beta\gamma))} \int\limits_0^t s^{\nu(1-\beta\gamma)-1}(t-s)^{\nu(1-\beta\gamma)-1}\, ds = \frac{M_2^2\,\Gamma^2(1-\beta\gamma)\; t^{2\nu(1-\beta\gamma)-1}\,\|u_0\|}{\Gamma(2\nu(1-\beta\gamma))}. \tag{20}$$

Учитывая (20), по индукции получаем

$$\|w_n(t)-w_{n-1}(t)\| \le \frac{M_2^n\,\Gamma^n(1-\beta\gamma)\; t^{n\nu(1-\beta\gamma)-1}\,\|u_0\|}{\Gamma(n\nu(1-\beta\gamma))}, \quad n\in N. \tag{21}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(w_n(t)-w_{n-1}(t))$ сходится равномерно в любом интервале $[t_0,t_1]$, $0<t_0<t_1$. Поэтому $w_n(t)$ на том же промежутке равномерно сходится к непрерывной на $[t_0,t_1]$ функции $w(t)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению (17). В силу (21) для нее справедлива оценка

$$\|w(t)\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\|w_n(t)-w_{n-1}(t)\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_2^{k+1}\,\Gamma^{k+1}(1-\beta\gamma)\; t^{(k+1)\nu(1-\beta\gamma)-1}\,\|u_0\|}{\Gamma((k+1)\nu(1-\beta\gamma))} \le$$

$$\le M_2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\; t^{\nu(1-\beta\gamma)-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_2^k\,\Gamma^k(1-\beta\gamma)\; t^{k\nu(1-\beta\gamma)}\,\|u_0\|}{\Gamma(k\nu(1-\beta\gamma)+\nu(1-\beta\gamma))} =$$

$$= M_2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\; t^{\nu(1-\beta\gamma)-1} E_{\nu(1-\beta\gamma),\nu(1-\beta\gamma)}\left(M_2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\; t^{\nu(1-\beta\gamma)}\right)\|u_0\|, \tag{22}$$

где $E_{\mu,\rho}(\cdot)$ — функция типа Миттаг-Леффлера, $t\in[t_0,t_1]$, $0<t_0<t_1$.

Поскольку промежуток $[t_0,t_1]$ произвольный, то функция $w(t)$ — непрерывное на $(0,\infty)$ решение уравнения (17), удовлетворяющее на $(0,\infty)$ неравенству (22), т.е., абсолютно интегрируема в нуле. Более того, из равенства (17) и условия 2(ii) мы заключаем, что $D^\alpha w(t)\in C((0,\infty),E)$ абсолютно интегрируема в нуле.

Наконец, из равенства (16), с помощью теоремы 2, мы получаем решение $u(t)$ задачи (1), (2) в виде

$$u(t) = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t) T_\beta(\tau) u_0\, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) T_\beta(\tau) w(s)\, d\tau ds,$$

для которого, в силу (5), (22) и (19) справедлива оценка

$$\|u(t)\| \le M_1\;\|u_0\| \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)\tau^{\beta-1}\, d\tau + M_1\; M_2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\,\|u_0\| \quad \times$$

$$\times \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{\beta-1} s^{\nu(1-\beta\gamma)-1} E_{\nu(1-\beta\gamma),\nu(1-\beta\gamma)}\left(M_2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\; s^{\nu(1-\beta\gamma)}\right)\, d\tau ds =$$

$$= \frac{M_1\ \Gamma(\beta)\ t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\|u_0\|+$$

$$+\frac{M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(1-\beta\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\,\|u_0\|\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\nu(1-\beta\gamma)-1}E_{\nu(1-\beta\gamma),\nu(1-\beta\gamma)}\left(M_2\ \Gamma(1-\beta\gamma)\ s^{\nu(1-\beta\gamma)}\right)\,ds=$$

$$= \frac{M_1\ \Gamma(\beta)\ t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\|u_0\|+$$

$$+M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(1-\beta\gamma)\ t^{\alpha+\nu(1-\beta\gamma)-1}\ E_{\nu(1-\beta\gamma),\alpha+\nu(1-\beta\gamma)}\left(M_2\ \Gamma(1-\beta\gamma)\ t^{\nu(1-\beta\gamma)}\right)\ \|u_0\|\,,$$

при этом мы использовали равенство

$$I^\alpha\left(t^{\beta-1}\ E_{\mu,\beta}\left(ct^\mu\right)\right)=t^{\alpha+\beta-1}\ E_{\mu,\alpha+\beta}\left(ct^\mu\right),\quad \alpha,\ \beta,\ \mu>0.$$

Установим далее единственность решения задачи (1), (2). Пусть имеется другое решение, которое мы обозначим $U(t)$. Тогда в силу теорем 1 и 2

$$U(t)=\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)W(s)\ d\tau ds,$$

где $W(t)$ — решение интегрального уравнения (17).

Докажем единственность решения этого интегрального уравнения в классе непрерывных на $(0,\infty)$ функций, допускающих оценку

$$\|W(t)\|\le M_0t^{\delta-1}e^{\omega t}, \tag{23}$$

где $\delta=\nu(1-\beta\gamma)<1$. Отметим, что функции, для которых выполнена оценка (22), входят в указанный класс в силу известного (см. [9, с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера

$$E_{\delta,\delta}(z)=\frac{1}{\delta}z^{1/\delta-1}\exp\left(z^{1/\delta}\right)-\sum_{j=1}^n\frac{1}{\Gamma(\delta-\delta j)\ z^j}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\quad z\in R,\ z\to+\infty.$$

Пусть $b>0$, $t\in(0,b]$, $\varepsilon_n\to0$, n — достаточно большое натуральное число. Поскольку мы рассматриваем класс функций удовлетворяющий неравенству (23), то обозначим через

$$m=\sup_{t\in[0,b]}\left(t^{1-\delta}e^{-nt}\|W(t)-w(t)\|\right).$$

Учитывая неравенство (19), после очевидных преобразований будем иметь

$$\|W(t)-w(t)\|\le\frac{M_2\ \Gamma(1-\beta\gamma)}{\Gamma(\delta)}\int\limits_0^t(t-s)^{\delta-1}\|W(s)-w(s)\|\ ds\le$$

$$\le\frac{M_2\ \Gamma(1-\beta\gamma)\ m}{\Gamma(\delta)}\int\limits_0^t(t-s)^{\delta-1}s^{\delta-1}e^{ns}\ ds\le\ \frac{M_2\ \Gamma(1-\beta\gamma)\ m}{\Gamma(\delta)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{\varepsilon_nt}(t-\varepsilon_nt)^{\delta-1}s^{\delta-1}e^{ns}ds+\int\limits_{\varepsilon_nt}^{t-\varepsilon_nt}(t-\varepsilon_nt)^{\delta-1}\left(\varepsilon_nt\right)^{\delta-1}e^{ns}ds+\right.$$

$$+\int\limits_{t-\varepsilon_n t}^{t}(t-s)^{\delta-1}(t-\varepsilon_n t)^{\delta-1}e^{ns}ds\Bigg)\le\frac{M_2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\;m}{\Gamma(\delta)}\Bigg((1-\varepsilon_n)^{\delta-1}t^{\delta-1}\int\limits_0^{n\varepsilon_n t}\left(\frac{\tau}{n}\right)^{\delta-1}e^{\tau}\frac{d\tau}{n}+$$

$$+\varepsilon_n^{\delta-1}(1-\varepsilon_n)^{\delta-1}t^{2(\delta-1)}\frac{e^{nt}}{n}+(1-\varepsilon_n)^{\delta-1}t^{\delta-1}e^{nt}\int\limits_0^{n\varepsilon_n t}\left(\frac{\tau}{n}\right)^{\delta-1}e^{-\tau}\frac{d\tau}{n}\Bigg)\le$$

$$\le\frac{M_2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\;m}{\Gamma(\delta)}\left(\frac{2\,(1-\varepsilon_n)^{\delta-1}t^{\delta-1}}{n^\delta}\frac{(n\varepsilon_n t)^\delta}{\delta}e^{nt}+\frac{\varepsilon^{\delta-1}(1-\varepsilon_n)^{\delta-1}t^{2(\delta-1)}}{n}e^{nt}\right)\le$$

$$\le\frac{M_2\,\Gamma(1-\beta\gamma)\varepsilon_n^\delta(1-\varepsilon_n)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\left(\frac{2b^\delta}{\delta}+\frac{1}{n\varepsilon_n^{2-\delta}}\right)t^{\delta-1}e^{nt}\;m. \qquad (24)$$

Выбирая $\varepsilon_n\to 0$ так, чтобы последовательность $\dfrac{1}{n\varepsilon_n^{2-\delta}}$ была ограниченной, из (24) для достаточно больших n получим $m=\sup\limits_{t\in[0,b]}\left(t^{1-\delta}e^{-nt}\|W(t)-w(t)\|\right)=0$, откуда, в силу произвольности $b>0$, следует $W(t)\equiv w(t)$ при $t>0$, что и завершает доказательство единственности. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и* $\alpha=\beta<1$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|u(t)\|\le M_1\;t^{\alpha-1}\|u_0\|+M_1\;M_2\;\Gamma(\alpha)\;\Gamma(1-\alpha\gamma)t^{\alpha(1-\gamma)}E_{1-\alpha\gamma,\alpha+1-\alpha\gamma}\left(M_2\;\Gamma(1-\alpha\gamma)\;t^{1-\alpha\gamma}\right)\;\|u_0\|\,.$$

Доказательство. Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3, при этом для сведения к интегральному уравнению используется только теорема 2.

Отметим также работу [10], в которой теорема о возмущении доказана для уравнения, содержащего дробную производную Капуто, в предположении что оператор A — генератор аналитической полугруппы и $\beta=1$. Из этой же работы заимствован следующий пример.

Пример. Пусть $E=L_2(R^n)$ и, следовательно, условие 3 выполнено (см. [5, с. 20]). На множестве $D(A)=H^{2m}(R^n)$ определим оператор A следующим образом

$$Au(t,x)=\sum_{|p|=2m}a_p(x)\frac{\partial^{p_1}\cdots\partial^{p_n}u(t,x)}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}},$$

где $\sum\limits_{|p|=2m}a_p(x)\xi^p\ge(-1)^{m+1}M_0|\xi|^{2m}$ для любых $x,\ \xi\in R^n$ (сильная эллиптичность); коэффициенты $a_p(x)$ при $|p|=2m$ удовлетворяют равномерному в R^n условию Гельдера. Оператор A, таким образом, удовлетворяет условию 1 при $\beta=1$.

Оператор $B(t)$ определим на $D=H^{2m-1}(R^n)\supset D(A)$ равенством

$$B(t)u(t,x)=\sum_{|p|\le 2m-1}a_p(t,x)\frac{\partial^{p_1}\cdots\partial^{p_n}u(t,x)}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}+\int\limits_\Omega\sum_{|p|\le 2m-1}b_p(t,x,\xi)\frac{\partial^{p_1}\cdots\partial^{p_n}u(t,\xi)}{\partial\xi_1^{p_1}\cdots\partial\xi_n^{p_n}}\;d\xi,$$

где $\Omega\subset R^n$; коэффициенты $a_p(t,x)$ при $|p|\le 2m-1$ и каждом $t\ge 0$ непрерывны, ограничены по $x\in R^n$ и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\mu>\alpha$ по t равномерно по $x\in R^n$; коэффициенты $b_p(t,x,\xi)$ непрерывны,

$$\int\limits_{R^n}\int\limits_\Omega|b_p(t,x,\xi)|^2\;d\xi dx<+\infty,\;\int\limits_{R^n}\int\limits_\Omega|b_p(t_2,x,\xi)-b_p(t_1,x,\xi)|^2\;d\xi dx\le C\,|t_2-t_1|^\mu,\;\alpha<\mu\le 1,\;C>0.$$

Оператор $B(t)$ удовлетворяет условию 2 при некотором $\gamma\in(0,1)$.

При $u_0(x)\in H^{2m}(R^n)$, в силу теоремы 4 задача (1), (2) (задача типа Коши для интегро-дифференциального уравнения) однозначно разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костин В.А.* К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными. ДАН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 597–600.
2. *Глушак А.В.* О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2001. № 2. С. 74–77.
3. *Глушак А.В., Поваляева Ю.В.* О свойствах решений задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Spectral and Evolution Problems. Simferopol. 2004. V. 14. P. 163–172.
4. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966.
5. *Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel. Boston. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001.
6. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир. 1967.
7. *Глушак А.В.* О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2002. № 1. С. 121 – 123.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981.
9. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966.
10. *El-Borai M.M.* Some probablitiy densities and fundamental solutions of fractional evolution equations. Chaos. Solitons and Fractals. 2002. V. 14. P. 433 – 440.

ABSTRACT

In the Banach space investigate the following Cauchy problem $D^\alpha u(t) = Au(t) + B(t)u(t)$, $t > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0$, where $0 < \alpha < 1$, $D^\alpha u(t)$ — the left-side fractional derivative of Riemann-Liouville of order α with the initial value in the point $t = 0$, $D^{\alpha-1}u(t)$ — the left-side fractional integral of Riemann-Liouville of order $1-\alpha$, A — linear closed densely defined operator. Finally $B(t)$ is linear closed densely defined, but already variable unbounded operator, it is concerned as perturbed of operator A.

In the assumption, that corresponding Cauchy problem with operator A is homogenous correctly and operator $B(t)$ in some sense is subordinated to operator A established existence and uniqueness of solution of the investigated problem.

Belgorod State University
aleglu@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В банаховом пространстве рассматривается следующая задача типа Коши $D^\alpha u(t) = Au(t)+B(t)u(t)$, $t > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0$, где $0 < \alpha < 1$, $D^\alpha u(t)$ — левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка α с началом в точке $t = 0$, $D^{\alpha-1}u(t)$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$, A — линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, наконец, $B(t)$ — также линейный, замкнутый, плотно определенный, но уже переменный неограниченный оператор, рассматриваемый как возмущение оператора A.

В предположении, что соответствующая задача типа Коши с оператором A равномерно корректна, а оператор $B(t)$ в некотором смысле подчинен оператору A, устанавливается однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Белгородский государственный университет
aleglu@mail.ru