Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БЕЛГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ ИНФОРМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Р.Г. АСАДУЛЛАЕВ

Формально-логические средства организации управления

Учебное пособие
по направлениям подготовки бакалавров 38.03.05 «Бизнес-информатика» и магистров 38.04.05 «Бизнес-информатика» профиль подготовки «Управление жизненным циклом информационных систем»

Белгород 2016

УДК 51:004.832.32
ББК 22.1+30в6

Составитель: Кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных технологий Института инженерных технологий и естественных наук
Р.Г. Асадуллаев

Рецензенты: Кандидат технических наук, доцент кафедры технической кибернетики БГТУ им. В.Г. Шухова
А.Г. Бажанов;
Кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной информатики и информационных технологий
В.В. Ломакин

Формально-логические средства организации управления: учебное пособие / сост. Р.Г. Асадуллаев. – Белгород, 2016. – 136 с.

Учебное пособие предназначено для проведения лекционных и практических занятий по дисциплинам «формально-логические средства организации управления» и «формально-логические средства интеллектуальных систем». Пособие содержит следующие разделы курса: введение в теорию множеств, комбинаторика, математическая логика, теория графов, конечно автоматные графы и сети Петри.

Оглавление

Введение

Формально-логические средства организации управления представляют собой инструментарий, в основу которого заложены положения дискретной математики. Дискретная математика изучает дискретные математические структуры, основанные на конечных множествах. Основы дискретной математики заложены в глубокой древности. Примером могут служить комбинаторно-логические задачи, решение которых связано с перебором комбинаций дискретных объектов и логическим анализом возникающих вариантов. Однако, основное развитие дискретная математика получила во второй половине XX века, связанное с появлением электронно-вычислительной техники и бурным развитием информационных технологий (ИТ), требующих развития и оптимизации алгоритмического и методологического обеспечения. В это время дискретную математику так же называли компьютерной математикой.

В середине XX века решается задача выбора архитектуры ЭВМ, как мы знаем, победу одержала архитектура Джона фон Неймана, основанная на двоичной логике. Но были и альтернативные решения, в частности архитектура, основанная на троичной логике или же на нейронных сетях.

Во второй половине XX века начинают закладываться основы искусственного интеллекта. В это время ученые ставят перед собой амбициозные задачи, в частности разработка искусственного интеллекта. Становится понятно, что разработка искусственного интеллекта в настоящее время невозможна и интерес научного сообщества ослабляется к данной проблеме. На смену приходит понятие искусственные интеллектуальные системы, то есть системы, обладающие признаками интеллекта в определенной ограниченной предметной области.

В 80е годы XX века разрабатываются экспертные системы, предназначенные для формализации экспертных знаний. В это время возобновляется интерес научного сообщества к разработке систем данного класса. На них возлагают большие надежды, вплоть до замены экспертов на экспертные информационные системы. Но и здесь ученые сталкиваются с ограничением применимости экспертных систем. Выражено это в том, что часто экспертные знания тяжело выявить, эксперт интуитивно понимает, что необходимо в сложившейся ситуации действовать определенным образом, но объяснить, почему он пришел к данному мнению не в состоянии. Другим аспектом является специфика знаний экспертов инженерных специальностей, особенно связанных с ИТ. Пока производится наполнение базы знаний экспертной системы знаниями как управлять технологической линией или как работать в определенной информационной среде, технологическая линия может уже устареть (на смену будет поставлена новая линия), интерфейс и функционал информационной среды также устареет и появится новая версия. Эксперт может относительно быстро адаптироваться к сложившейся ситуации, так как обычно та же новая технологическая линия скорей всего сохранила основные принципы работы и эксперту остается лишь совершенствовать свои знания. А вот экспертную систему необходимо снова наполнять знаниями да еще плюс ждать пока эксперт эти знания сам получит. Еще важно учесть тот аспект, что один и тот же тип экспертной системы по управлению одним и тем же процессом может содержать разные знания, так как в качестве экспертов выступали разные люди. Это не говорит о том, что одна система работает плохо, а другая хорошо, просто у них различная структура знаний.

Экспертные системы нашли широкое применение в сферах, где знания хорошо формализуемы и не имеют различной трактовки. Например, медицина или юриспруденция. Параллельно развиваются и системы поддержки принятия решений, способные например, ранжировать альтернативы решений по множеству критериев различной природы. При этом данные системы также основываются на экспертных знаниях.

Ограниченность применения экспертных систем привела к развитию средств моделирования. Ученые пришли к выводу, что во многих процессах эффективнее провести моделирование, чем выстраивать крупную экспертную систему.

Благодаря тому, что в различные периоды времени учеными ставились различные амбициозные задачи, параллельно развивались методы их достижения, некоторые из которых в результате формировались в полноценные направления исследования. В частности, в это время развиваются:

- комбинаторно-логический подход построения интеллектуальных информационных систем, позволяющий дать объяснение процессу выявления знаний;
- аппарат нечеткой логики, позволяющий оперировать знаниями, выраженными в нечеткой форме приближенной к естественному языку человека;
- нейронные сети, решающие широкий круг задач распознавание образов, классификация, распознавание речи и так далее;
- конечо-автоматные структуры (конечные автоматы и сети Петри), позволяющие моделировать дискретные системы;
- методы имитационного моделирования;
- и многие другие подходы и средства моделирования и построения интеллектуальных информационных систем.

Дискретная математика становится базисом для построения вышеуказанных систем и методов. В свою очередь совершенствование интеллектуальных систем и систем моделирования, требовало совершенствования алгоритмов и подходов их функционирования, что привело к развитию формальных структур дискретной математики.

Книга, представленная Вашему вниманию, описывает основополагающие средства дискретной математики, используемые при моделировании систем и построении интеллектуальных информационных систем. Автором не ставится задача доказательства и вывода теорем. Также не ставится задача освещения всех средств дискретной математики. Книга не ориентирована на программистов, в частности в нее не включены разделы теории кодирования, теории алгоритмов или теории функциональных систем.

Специфика изложения материала, заключается в донесении средств дискретной математики, используемых при моделировании систем и построении интеллектуальных информационных систем. Изложение материала исходит из того, что к изучению книги приступают обучающиеся на начальном этапе и только начинают изучать основы моделирования систем и построения интеллектуальных информационных систем.

Раздел 1. Введение в теорию множеств

Множество является основополагающим понятием дискретной математики. Все разделы дискретной математики в той или иной степени оперируют элементами теоретико-множественного аппарата. Теория множеств предоставляет специалистам в области моделирования систем и построения интеллектуальных информационных систем гибкий инструментарий систематизации и классификации элементов системы, установления взаимосвязи между объектами, а также формальные средства описания системы.

Глава 1. Множества и операции над ними

1.1. Понятие множества и способы его задания

Множество – совокупность элементов произвольной природы, обладающих каким-то одним общим свойством. Элементы в рамках одного множества не могут повторяться.

Понятие множество является фундаментальным в дискретной математике, так как при помощи множеств можно формально представить структуры, описанные средствами дискретного аппарата.

Множество обозначают: M, N, P …..

$m_1, m_2,.., m_n$ – элементы множества.

$m \in M$ – принадлежность элемента m к множеству M.

$m \notin M$ – непринадлежность элемента m к множеству M.

Функция принадлежности множества – устанавливает принадлежность элемента множеству и может принимать два значения $\{0,1\}$. В теории множеств, как правило, не рассматривается понятие функции принадлежности в силу ее очевидности. Но это важное понятие, которое приобретает силу при рассмотрении нечетких множеств, где данная функция принимает значение в диапазоне $[0..1]$ и говорит о том, что один и тот же элемент может быть отнесен к разным множествам с различной функцией принадлежности.

Пример. Числовые множества:

- 1,2,3,… - множество натуральных чисел N;
- 0,1,2,3,… - множество натуральных чисел, включая 0 N_0;
- …,-2,-1,0,1,2,… - множество целых чисел Z;
- $\dfrac{N}{N}$ - множество рациональных чисел R.

Пустое множество - множество, не содержащее элементов. Обозначается символом $\varnothing$. Понятие пустого множества упрощает задачу формального представления объектов. С точки зрения формального описания объектов проще заять, что множество пустое, чем его не существует. Не существование множества необходимо доказать.

Пример. Множество M, содержащее сумму углов треугольника $\sum \Delta \neq 180^0$, является пустым: $M = \varnothing$.

Множество A называется ***подмножеством*** B, если всякий элемент a является элементом b.

$A \subseteq B$ – A подмножество B (нестрогое включение), $\subseteq$ - знак нестрогого включения.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$ то $A \subset B$ (строгое включение).

Если $A \subseteq B$, то множество A называется ***подмножеством*** множества B (также говорят, что B покрывает A). Если при этом $A \neq B$, то множество A называется ***собственным подмножеством*** $A \subset B$ (рис. 1.1).

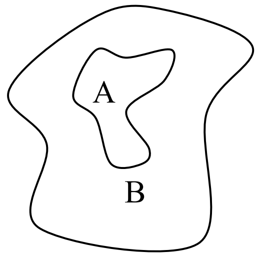


Рис. 1.1. Строгое включение множества A в B

Три определения равенства множеств. Множества A={a1, a2, …,an} и B={b1, b2, ….,bm} равны если:

1) их элементы совпадают a1=b1, a2=b2, …., an=bm, при этом n=m;
2) $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.
3) Если установлено взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B. Данное утверждение вытекает из описания свойств соответствий.

Если дано множество U и мы рассматриваем все его подмножества, то множество U называется ***универсальным множеством***.

Понятие универсальное множество является относительным понятием, так как рассматривается в некотором контексте (ограничивается рассматриваемой предметной областью). Элементы множества так же могут быть множествами.

Пример. Если за U взять множество книг, то его подмножества: книги по математике, биологии, физике, химии…

Три способа задания множества:

1) Перечислением, то есть списком своих элементов. Списком можно задать лишь конечные множества. Обозначение списка – в фигурных скобках. Например, множество A специальности университета *A= {менеджмент организации, управление персоналом, информационный менеджмент, бизнес-информатика};*

2) Описанием характеристических свойств P, которыми должны обладать его элементы x: M= {x: P(x)} Например, A все целые числа в интервале $1<x<5$. $A=\{2, 3, 4\}$;

3) Порождающей процедурой, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов, либо других объектов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, *A* множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. $A= \{1, 2\}$.

Упражнения

1. Приведите пример множеств дисциплин, учебных циклов и разделов, опираясь на паспорт специальности[1].
2. Есть элементы: 1,3,5,7. При каких условиях включения множество *M* будет пустым $M = \varnothing$?
3. При каких условиях множество A = {1,2,3,4,12,14,15}, является универсальным множеством?
4. Приведите пример универсального множества, описывающего определенную предметную область?

Вопросы для повторения

1. Что такое множество?
2. Какие вы знаете числовые множества?
3. Что такое пустое множество?
4. В чем отличие подмножества и собственного подмножества?
5. Какие бывают включения и в чем особенности каждого из них?
6. В чем особенность универсального множества?
7. Какие способы задания множеств Вы знаете?
8. Какими способами можно определить равенство множеств?

1.2. Операции над множествами

Операция - это функция, все аргументы и значения которой принадлежат одному и тому же множеству. ***Арность операции*** – это число аргументов операции.

Унарная операция – это функция одного аргумента $\varphi(x) = y$, имеющая тип $\varphi: M \rightarrow M$.

Пример. Унарные операции:

• элементные функции e^x, $logx$, $sinx$;

• операция над множествами дополнение $\bar{A}$.

Бинарная операция – это функция двух аргументов $\varphi(x,y)=z$, имеющая тип $\varphi: M \times M \rightarrow M$.

Операции над множествами удобно изображать при помощи диаграмм Венна, которые являются геометрическим изображением множеств в виде области на плоскости. Данный способ не является доказательным. Он предназначен для графической интерпретации операций над множествами.

---

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 080500 бизнес-информатика (квалификация (степень) бакалавр).

Объединением множеств *A* и *B* называется множество *C*, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств *A* и *B*. Обозначение $C = A \cup B$.

Пусть даны два множества *A* и *B*. Тогда их объединением (рис. 1.2) называется множество $C = A \cup B$ = {x: x$\in$*A* или x$\in$*B*}.

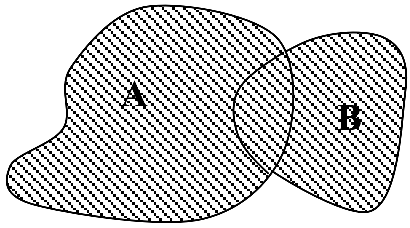


Рис. 1.2. Объединение множеств *A* и *B*

Пример. Пусть *A={1,2,3,4}*, *B={3,4,5,6,7}*. Тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Пересечением множеств *A* и *B* называется множество *C*, элементы которого принадлежат и *A* и *B*. Обозначение $C = A \cap B$.

Пусть даны два множества *A* и *B*. Тогда их пересечением (рис. 1.3) называется множество $C = A \cap B$ = {x: x$\in$*A* и x$\in$*B*}.

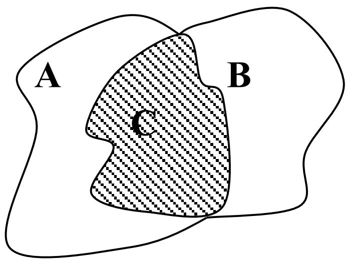


Рис. 1.3. Пересечение множеств *A* и *B*

<u>Пересечение прямой и плоскости:</u>

1) если прямые не параллельны плоскости, то множество пересечений – единственная точка;

2) если прямые параллельны плоскости, то *M=Ø*.;

3) если прямые совпадают с плоскостью, то множество пересечений = множеству точек прямой.

Пример. Пусть *A = {1,2,3,4}*, *B = {3,4,5,6}*. Тогда $A \cap B = \{3,4\}$.

Разностью множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B*. Обозначается: *C=A\B*.

Пусть даны два множества *A* и *B*. Тогда их разностью (рис. 1.4) называется множество С=*A* *B* = {x: x$\in$*A* и x$\notin$*B*}.

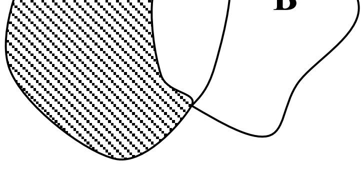


Рис. 1.4. Разность множеств *A* и *B*

Операция разности множеств строго двухместна (т.е. определена только для двух множеств).

Пример. Если $A = \{a,b,d\}$; $B = \{b,c,d,h\}$. Тогда $C = A \setminus B=\{a\}$.

Частным случаем разности является операция дополнение. Если все рассматриваемые множества являются подмножеством некоторого «универсального множества» множества U, то может быть определена операция ***дополнения***. ***Дополнением*** (рис. 1.5) до *U* множества *A* называется множество всех элементов, не принадлежащих *A* (но принадлежащих *U*) $\overline{A} = U \setminus A$, где *U* – универсальное множество; $\overline{A}$ - дополнение.

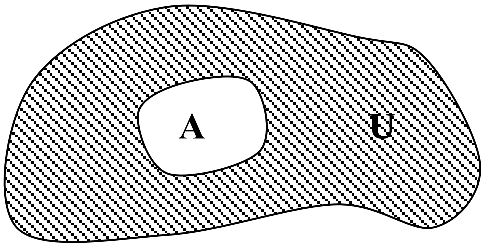


Рис. 1.5. Дополнение множества *A* до универсального множества U

Упражнения

1. Даны множества, содержащие основные профессиональные задачи для бакалавра направления подготовки «бизнес-информатики»: A = {анализ архитектуры предприятия; исследование и анализ рынка ИС и ИКТ; анализ и оценка применения ИС и ИКТ для управления бизнесом; анализ инноваций в экономике, управлении и ИКТ} и B = {анализ и оценка применения ИС и ИКТ для управления бизнесом; анализ инноваций в экономике, управлении и ИКТ; обследование деятельности и ИТ-инфраструктуры предприятий; подготовка контрактов, оформление документации на разработку, приобретение или поставку ИС и ИКТ}. Найти:

а) объединение множеств A и B;

б) пересечение множеств A и B;

в) разность множеств A и B.

2. На примере множества компетенций Вашего направления подготовки покажите операцию дополнения.

3. Пусть универсальное множество *U* – множество всех сотрудников некоторой фирмы; *A* – множество всех сотрудников данной организации старше 35 лет; *B* – множество всех сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет; *C* – множество менеджеров фирмы. Каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств:

а) $\overline{B}$;

б) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$;

в) $A \cup (B \cap \overline{C})$;

г) $B \setminus C$;

д) $C \setminus B$.

4. Изобразить диаграмму Венна, задающую множества *A*, *B* и *C* ($A \cap B \cap C \neq 0$) и обозначить на ней штриховкой множество. При этом постарайтесь привязать заданные множества к реальной предметной области:

$$а) U \setminus (\overline{A} \cup \overline{C});$$

$$б) C \cup (U \cap B);$$

$$в) \overline{A} \setminus (B \cap \overline{C});$$

$$г) A \cup (C \setminus \overline{B}).$$

5. Известно, что на предприятии 1000 сотрудников. Распределение по занимаемым должностям имеет следующий вид (при этом специфика предприятия такова, что один человек может занимать несколько должностей):

а) менеджер – 180; ИТ специалист – 210; архитектор – 220; менеджер и ИТ специалист – 60; менеджер и архитектор – 80; архитектор и ИТ специалист – 75; менеджер и ИТ специалист и архитектор – 15;

б) менеджер – 170; ИТ специалист – 1200; архитектор – 280; менеджер и ИТ специалист – 90; менеджер и архитектор – 120;

в) менеджер – 150; ИТ специалист – 150; архитектор – 200; менеджер и ИТ специалист – 90; менеджер и архитектор – 90; архитектор и ИТ специалист – 55; менеджер и ИТ специалист и архитектор – 35;

а) менеджер – 250; ИТ специалист – 170; архитектор – 180; менеджер и ИТ специалист – 60; менеджер и архитектор – 55; архитектор и ИТ специалист – 35.

Изобразить соответствующую диаграмму Венна и определить, сколько сотрудников занимает должности:

а) не принадлежащие указанным;

б) только менеджеры;

в) только ИТ специалисты;

г) только архитекторы.

6. Пусть $U = \{a,b,c,d\}$, $X = \{a,c\}$, $Y = \{a,b,d\}$, $Z = \{b,c\}$. Найти множества:

а) $X \cap \overline{Y}$;

б) $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$;

в) $X \cup (Y \cap Z)$;

г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

д) $X \cap Y$;

е) $\overline{X} \cap \overline{Y}$.

7. Из 300 сотрудников организации 170 умеют проектировать интеллектуальные информационные системы, 210 – умеют внедрять подобные системы на производство, 30 не обладают указанными навыками. Сколько сотрудников одновременно умеет проектировать интеллектуальные информационные системы и внедрять подобные системы на производство?

Вопросы для повторения

1. Что представляют собой диаграммы Венна?
2. Каким образом выполняется операция объединения?
3. Каким образом выполняется операция пересечения?
4. Каковы особенности пересечения прямой и плоскости?
5. В чем заключается особенность операции дополнения?

1.3. Мощность множества. Формула включения и исключения

Множества бывают *конечные и бесконечные*.

Конечное множество имеет конечное количество элементов, в противном случае множество называется **бесконечным**.

Мощность множества *M* - число элементов конечного множества. Обозначается как $|M|$.

1. Мощность для операции объединения:

1.1. Множества не пересекаются (рис1.6, а).

$$|A \cup B| \le |A| + |B| .$$

1.2. Одно множество содержится в другом (рис. 1.6, б).

$$|A \cup B| \ge \max(|A|,|B|)$$

Операция $\max(|A|,|B|)$ выбирает множество с максимальной мощностью. Таким образом, выполняется следующее соотношение:

$$\max(|A|,|B|) \le |A \cup B| \le |A| + |B| \cdot$$

1.3. При пересечении множеств, выполняется следующее равенство (рис 1.6, в):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

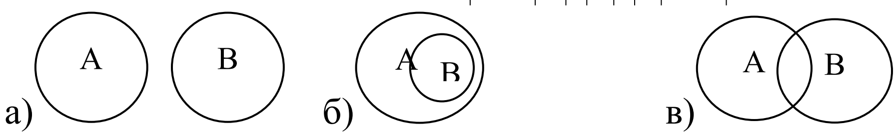


Рис. 1.5. Крайние случаи операции объединения множеств: (*а)* множества не пересекаются; *б)* одно множество содержится в другом; *в)* множества пересекаются

2. Мощность для операции пересечения:

2.1. Множества не пересекаются (рис. 1.5, а).

$$|A \cap B| = 0$$

2.2. Одно множество содержится в другом (рис. 1.5, в).

$$|A \cap B| \le \min(|A|,|B|)$$

Операция $\min(|A|,|B|)$ выбирает множество с минимальной мощностью. Таким образом, выполняется следующее соотношение:

$$0 \le |A \cap B| \le \min(|A|,|B|)$$

3. Мощность для операции дополнение:

3.1. $|\overline{A}| = |\mathrm{U}| - |A|$.

Пример. Дана группа студентов Г, в которой студенты занимаются различными хобби книги К, спорт С, музыка М. Некоторые студенты увлекаются несколькими хобби музыка и книги МК, книги и спорт КС, музыка и спорт МС, музыка и книги и спорт МКС. При этом известно, что есть студенты, не увлекающиеся ни одним из указанных хобби Н. Имея мощности множеств определить сколько студентов не имеют хобби.

При решении задачи будет использовано соотношение, определяющее мощность пересекающихся множеств $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Для определения студентов, не имеющих хобби нужно найти $|Г - (M \cup C \cup К)|$. Рассчитаем $|M \cup C \cup К| = |(M \cup К) \cup C| = |M \cup К| + |C| - |(M \cup К) \cap C| =$

$$= |M| + |К| - |M \cap К| + |C| - |((M \cap C) \cup (К \cap C))| =$$

$$= |M| + |К| - |M \cap К| + |C| - |M \cap C| - |К \cap C| + |((M \cap C) \cap (К \cap C))| =$$

$$= |M| + |К| + |C| - |M \cap К| - |M \cap C| - |К \cap C| + |M \cap К \cap C|$$

Теперь можно записать:

$$|Г| - (|M| + |К| + |C| - |M \cap К| - |M \cap C| - |C \cap К| + |M \cap К \cap C|) = |Н|$$

Запишем полученное выражение в общем виде. Пусть даны множества A_1, A_2 и A_3. Пересечения данных множеств A_{12}, A_{13}, A_{23} и A_{123}. Тогда:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{i,j=1}^{3} |A_{ij}| + |A_{123}|$$

Для A_1, A_2, ….,A_n данное выражение будет записано следующим образом:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}| + \sum_{i,j,k=1}^{n} |A_{ijk}| - .....+ (-1)^{n-1} |A_{123.n}|$$

Данная формула называется **формулой включения и исключения**. Название дано из-за поочередности знаков в выражении.

Пример. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Всего чисел, меньших тысячи, 999. Из них 999:3=333 делятся на 3,

999:5=199 (ост. 4) делятся на 5,

999:7=142 (ост. 5) делятся на 7,

999:(3x5)=66 (ост. 9) делятся на 3 и на 5,

999:(3x7)=47 (ост. 12) делятся на 3 и на 7,

999:(5x7)=28 (ост. 10) делятся на 5 и на 7,

999:(3x5x7)=9 (ост. 45) делятся на 3, на 5 и на 7.

В итоге искомых чисел 999-(333+199+142-66-47-28+9)=457.

Упражнения

1. Дано множество M = {аналитическая; организационно-правленческая; проектная; научно-исследовательская; консалтинговая; инновационно-предпринимательская}. Какова мощность данного множества?

2. Даны два множества: A = {история России, менеджмент, право, философия, макроэкономика, микроэкономика, иностранный язык}, B = {психология, социология, микроэкономика, иностранный язык}. Найти мощность множества C, при условии, что:

а) $C = A \cup B$;

б) $C = A \cap B$.

3. Составьте множества, мощность которых будет равна:

а) 7;

б) 3;

в) 0;

д) база знаний.

4. Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, которые не делятся ни на 3, ни на 7, ни на 11?

5. Дано множество A={0, 1, …, 100} и 3 его подмножества: A1={a | a – четное}, A2={a | a>60}, A3={a | 15<a<81}. Сколько элементов множества A не принадлежат ни одному из этих подмножеств?

6. В классе 50 человек, каждый из которых изучает иностранный язык. 25 человек изучает английский, 19 – французский и 22 – немецкий. При этом в группах, изучающих по два языка насчитывается по 15 человек. Сколько человек изучает все три языка?

Вопросы для повторения

1. Какие бывают множества?
2. Что такое мощность множества?
3. В чем особенности мощности множеств при выполнении операции объединение?
4. В чем особенности мощности множеств при выполнении операции пересечение?
5. В чем особенность мощности множеств при выполнении операции дополнение?
6. Отличаются ли законы для определения мощности конечного и бесконечного множеств?
7. В чем заключаются правила включения и исключения?
8. В каких задачах используется данные формулы?

1.4. Законы алгебры логики для множеств

Алгебра – это множество *M* вместе с заданными на нем операциями $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$.

Алгебра для множества - это некоторое множество, на котором определены три операции объединение, пересечение и дополнение.

Законы алгебры логики:

1. Коммутативность множеств:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Операция разности не коммутативна, т.е. $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Если $A \setminus B = \varnothing$, то $A \subset B$;

2. Ассоциативность (транзитивность) множеств:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

3. Дистрибутивный (распределительный) закон:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Пустое множество $X = \varnothing$ является нейтральным элементом операции объединения множеств $A \cup X = A$.

Если $X = \varnothing$ — пустое множество, то $A \cap X = X$.

$$A \setminus X = A$$
$$A \setminus A = X$$

5. $A \cup U = U$.

Универсальное множество U является нейтральным элементом операции пересечения множеств $A \cap U = A$;

$$U \setminus A = \overline{A}$$
$$A \setminus U = X$$

6. Идемпотентность:

$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$

7. Правило двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$

8. $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Упражнения

1. Проиллюстрировать на содержательном примере не коммутативность операции разности множеств: $A \setminus B \neq B \setminus A$.
2. Продемонстрируйте на примере множеств дисциплин для Вашего направления подготовки транзитивность множеств.
3. Продемонстрируйте на примере множеств дисциплин для Вашего направления подготовки идемпотентность множеств.
4. Продемонстрируйте на примере множеств дисциплин для Вашего направления подготовки коммутативность множеств.

Вопросы для повторения

1. Что такое алгебра для множества?
2. Какие законы алгебры логики вы знаете?

3. В чем заключается смысл распределительного закона?
4. В чем заключается смысл транзитивности множеств?
5. В чем заключается смысл коммутативности множеств?

Глава 2. Отношения

2.1. Бинарные отношения

Отношения - один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее изученными и чаще всего используемыми являются унарные и бинарные отношения.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-то определенного признака *R* (свойства) у элементов множества *M* (например, «быть менеджером» на множестве сотрудников фирмы). Такие отношения называют ***признаками***. Говорят, что *a* обладает признаком R, если $a \in R$ и $R \subseteq A$. Свойства одноместных отношений – это свойства подмножеств *A*, поэтому для случая $n = 1$ термин «отношения» употребляется редко. Иными словами, все такие элементы *a* из множества *M*, которые отличаются данным признаком *R*, образуют некоторое подмножество в *M*, называемое унарным отношением *R*, т.е. $a \in R$ и $R \subseteq M$.

Бинарные (двухместные) отношения используются для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве *M* (например, на множестве сотрудников фирмы может быть задано бинарные отношение «быть моложе» или же «работать в одном отделе»). Тогда все пары (a, b) элементов из *M*, между которыми имеет место данное отношение *R*, образуют подмножество пар из множества всех возможных пар элементов $MxM = M^2$, называемое бинарным отношением *R*, т.е. $(a,b) \in R$, при этом $R \subseteq MxM$.

Под ***n-местным отношением*** понимают подмножество *R* прямого произведения *n* множеств: $R \subseteq M_1 x M_2 x ... x M_n$. Говорят, что элементы $a_1, a_2, ... a_n$ ($a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ... a_n \in M_n$) находятся в отношении *R*, если $(a_1, a_2, ... a_n) \in R$.

Пример. Бинарные отношения на множестве профессий. Отношение «быть менеджером» выполняется для пары (менеджер по продажам, менеджер по закупкам) не выполняется для пары (инженер проектировщик, менеджер по продажам).

Бинарным (двухместным) отношением *R* называется подмножество пар $(a,b) \in R$ прямого произведения *M1*x*M2* т.е. $R \subseteq M_1 x M_2$. При этом множество M_1 называют областью определения отношения *R*, множество M_2-областью значений. Часто рассматривают отношения *R* между парами элементов одного и того же множества *M*, тогда $R \subseteq MxM$. Если *a, b* находятся в отношении R, это часто записывается как *a Rb*.

Пусть $R \subseteq AxB$ определено в соответствии с изображением на рис. 2.1. *Область определения D(R)* и *область значений Q(R)* определяются соответственно:

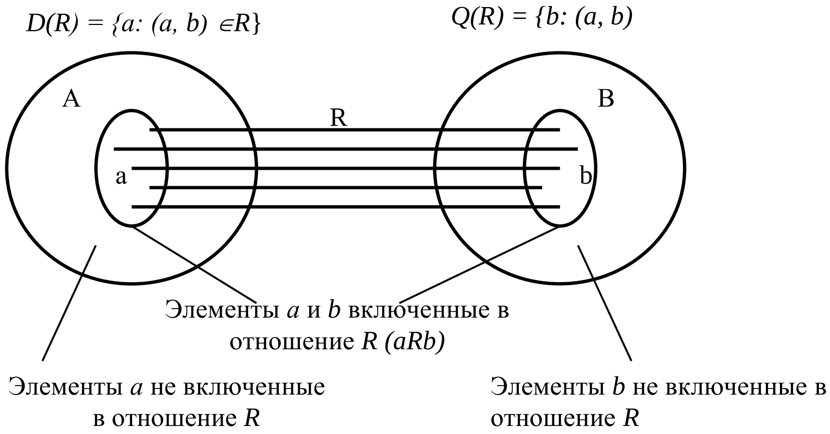


Рис. 2.1. Отношение *R* на множествах *A* и *B*

<u>*Способы задания бинарных отношений*</u> - любые способы задания множеств (так как отношения определены выше как подмножества некоторых множеств - прямых произведений). Отношения, определенные на конечных множествах, обычно задаются:

1. *Списком {перечислением) пар,* для которых это отношение выполняется (например *R = {(d, b), (f, r), (s,d)}*.

2. *Матрицей* - бинарному отношению $R \subseteq MxM$, где $M= \{a_1,a_2 ..a_n\}$, соответствует квадратная матрица порядка *n*, в которой каждый элемент c_{ij} определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если для соответсвующей пары соотношение выполняется}, \\ 0, \textit{в противном случае}. \end{cases}$$

Пример. Для конечного множества $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ задать списком и матрицей отношение *R* «иметь общий делитель равный двум».

Отношение *R* содержит все пары элементов *(a,b)* из *M,* такие что оба они делятся на 2 без остатка (табл. 2.1). Тогда *R={(2,2),(4,2),(6,2),(2,4),(4,4),(6,4),(2,6),(4,6),(6,6)}*

Таблица 2.1. Матрица отношения «иметь общий делитель равный двум»

R	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	1	0	1

Упражнения

1. Пусть M={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение $R \subseteq M \times M$, если *R* означает:

а) быть строго меньше;

б) быть делителем;

в) иметь общий делитель, отличный от единицы;

г) иметь один и тот же остаток от деления на 3.

2. Для конечного множества К = {аналитическая деятельность; способность к саморазвитию; владение одним из иностранных языков; организационно-управленческая деятельность; проектная деятельность} задать списком и матрицей отношение R «принадлежать к профессиональным компетенциям» заданное на некоторых сотрудников организации.

3. Задайте бинарное отношение между множеством студентов группы и множеством обязанностей.

Вопросы для повторения

1. Что называют отношением?
2. В чем отличия унарных и бинарных отношений?
3. Какие Вы знаете способы задания бинарных отношений?
4. Что является областью определения и областью значения?
5. С какой целью вводятся отношения?
6. Приведите собственный пример отношения?

2.2. Свойства однородных бинарных отношений

Пусть R - отношение на множестве M, $R \subseteq M x M$, Тогда:

1) Отношение R называется ***рефлексивным***, если для любого элемента $a \in M$ имеет место aRa, то есть каждый элемент находится в отношении сам с собой. Главная диагональ матрицы рефлексивного отношения содержит только единицы (например, отношения равенства «=», «$\leq$» и «иметь общий делитель»).

2) Отношение R называется ***антирефлексивным***, если ни для какого элемента $a \in M$ не выполняется aRa. Главная диагональ матрицы антирефлексивного отношения содержит только нули (например, отношения неравенства «$<$» и «иметь сына»).

3) Отношение R называется ***симметричным***, если для любой пары $(a,b) \in M^2$ из отношения aRb следует bRa. Иными словами, отношение R является симметричным тогда и только тогда, когда для любой пары $(a,b) \in M^2$ оно выполняется в обе стороны (или вовсе не выполняется). Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали: $c_{ij} = c_{ji}$ для любых i, j. (например отношение «быть симметричным относительно оси абсцисс» является симметричным: если первая точка симметрична второй относительно этой оси, то и вторая точка симметрична первой, «работать на одной фирме»).

4) Отношение R называется ***антисимметричным***, если из отношений aRb и bRa следует, что $a = b$, то есть перестановка допускается только в случае равенства $a = b$. (например отношение «$\leq$» является

антисимметричным. Действительно, если $a \le b$ и $b \le a$, это означает, что $a = b$).

5) Отношение R называется ***транзитивным***, если для любых a,b,c из отношений aRb и bRc следует aRc. (пример отношения «быть равным», «жить в одном городе», «быть параллельным». Отношение «быть сыном» не является транзитивным).

Замечание. В отличие от отношений рефлексивности и симметричности, для отношения транзитивности не формулируется противоположного понятия (антитранзитивности).

Упражнения

1. Пусть М — некоторое множество населенных пунктов. Зададим на нем бинарное отношение достижимости: из пункта А достижим пункт В, если есть дорога, по которой можно доехать из А в В. Какими свойствами обладает данное отношение, при условии, что из пункта А можно доехать до пункта В, а из В есть дорога до С, то из А можно проехать в С?

2. Пусть A={1; 2; 3; 4; 5; 6}. На этом множестве задано отношение $\rho \subseteq A^2$, которое имеет вид: ρ={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6), (1; 2), (1; 4), (2; 1), (2;4), (3;5), (5; 3), (4; 1), (4; 2)}. Какими свойствами обладает данное отношение?

3. Какими свойствами характеризуются следующие отношения, заданные на множестве $M = \{1,2,3,\dots,9\}$:

а) $R_1=\{(a, b):(a - b)$ - четное$\}$;

б) $R_2=\{(a, b):(a + b)$ - четное$\}$;

в) $R_3=\{(a, b):(a + 1)$ - делитель$(a + b)$ $\}$;

г) $R_4=\{(a, b)$: a - делитель $(a+b)$, $a \neq 1\}$.

Вопросы для повторения

1. В чем разница между рефлексивностью отношения и антирефлексивностью?

2. В чем суть свойств симметричности и антисимметричности отношения?

3. Какие отношения транзитивны?

4. Приведите собственные примеры отношений, удовлетворяющих каждому свойству?

Глава 3. Соответствия

3.1. Соответствия и их свойства

Соответствие – способ задания взаимосвязей, взаимодействий между элементами множества (наряду с отношениями). Частными случаями соответствий являются функции, отображения, преобразования, операции и др.

Соответствием между множествами *A* и *B* (рис. 3.1) называется некоторое подмножество *G* их декартова произведения: $G \subseteq A \times B$.

Если $(a;b) \in G$, то говорят, что b соответствует a при соответствии G .

Область определения $D(G)$ соответствия *G* – множество $np_1 G = \{a : (a,b) \in G\}$. **Область значений** $E(G)$ соответствия *G* - множество $np_2 G = \{b : (a,b) \in G\}$.

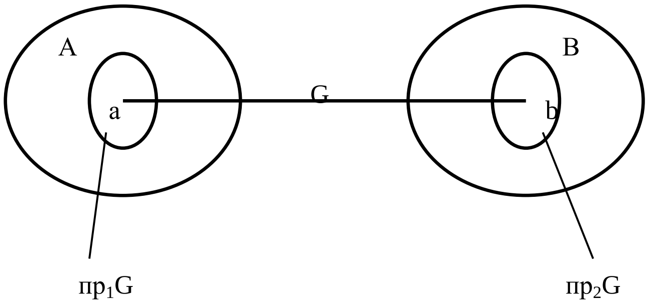


Рис. 3.1. Соответствие *G* между множествами *A* и *B*

В принятых обозначениях, каждый элемент $b \in B$, соответствующий данному элементу $a \in A$ называется ***образом*** a при соответствии G , наоборот, элемент $a \in A$ называется ***прообразом*** элемента $b \in B$ при данном соответствии.

Пример.

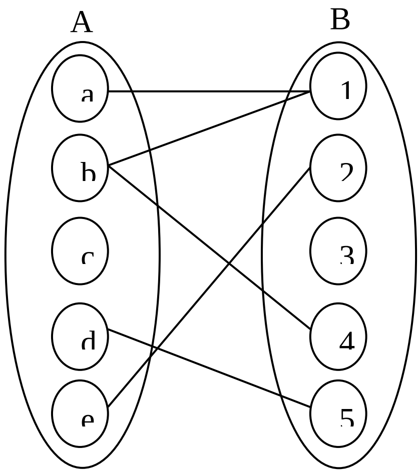


Рис. 3.2. Соответствие *G* между множествами *A={a, b, c, d, e}* и *B={1, 2, 3, 4, 5}*

В соответствии $G \subseteq A \times B$, приведенном на изображении $np_1G=\{a,b, d, e\}$ и $np_2G=\{1, 2, 4, 5\}$.

а образ 1

b образ 1 и 4
d образ 5
e образ 2

Свойства соответствий $G \subseteq A \times B$**:**

1) Соответствие называется ***полностью определённым***, если $D(G) = A$, то есть каждый элемент множества A имеет хотя бы один образ во множестве B; в противном случае соответствие называется ***частичным***.

2) Соответствие G называется ***сюръективным***, если $E(G) = B$, то есть если каждому элементу множества B соответствует хотя бы один прообраз во множестве A.

3) Соответствие G называется ***функциональным*** *(однозначным),* если любому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B (или отсутствуют таковые).

4) Соответствие называется ***инъективным***, если оно является функциональным, и при этом каждый элемент множества B имеет не более одного прообраза.

5) Соответствие G называется ***взаимно-однозначным*** *(биективным),* если любому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B, и наоборот. Можно сказать также, что соответствие является взаимно-однозначным, если оно является полностью определённым, сюръективным, функциональным, и при этом каждый элемент множества B имеет единственный прообраз.

Пример. а) Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами слов русского и английского языка. Оно не является функциональным, так как почти каждому русскому слову соответствует несколько английских переводов; оно, также, не является, как правило, полностью определённым соответствием, так как всегда существуют английские слова, не включённые в данный словарь. Таким образом, это частичное соответствие.

б) Соответствие между расположенными на шахматной доске фигурами и занимаемыми ими полями является взаимно однозначным.

в) Соответствие между телефонами города и их шестизначными номерами обладает, на первый взгляд, всеми свойствами взаимно-однозначного соответствия. Однако оно, например, не сюръективно, поскольку существуют пятизначные числа, не соответствующие никаким телефонам.

Упражнения

1. Приведите пример полностью определенного соответствия.

2. Приведите пример соответствия, удовлетворяющего свойству сюръективности.

3. Задайте соответствие между множествами книг и авторов. Опишите свойства данного соответствия.

4. Опишите соответствие множеств выдающихся людей и достижений в науке с его образами и прообразами (элементы общества генерируем самостоятельно).

Вопросы для повторения

1. Что называют соответствием?
2. Что называют образом и прообразом при соответствии?
3. Что называют областью значения и областью определения?
4. Какие вы знаете свойства соответствий?
5. Что позволяют соответствия?

3.2. Взаимно-однозначные соответствия и мощности множеств

Если между двумя конечными множествами A и B существует взаимно-однозначное соответствие, то эти множества **равномощны**. Этот очевидный факт позволяет, во-первых, установить равенство мощности этих множеств, не вычисляя их. Во-вторых, часто можно вычислить мощность множества, установив его однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна, либо легко вычисляется.

Пусть A — множество. Множество всех подмножеств множества A называется ***булеаном*** A (также степенью множества, показательным множеством или множеством частей) и обозначается $P(A)$ или 2^A. Ясно, что $0 \in P(A)$ и $A \in P(A)$.

Утверждение. Если мощность конечного множества A равна n, то число всех подмножеств A равно 2^n, то есть $2^{|A|} = 2^n$.

$2^{|A|}$ - мощность булеана.

Доказательство. Если $n = 0$, т.е. множество пусто, то у него только одно подмножество – оно само, и интересующее нас число равно $2^0 = 1$.

Пусть утверждение справедливо для некоторого n и пусть M – множество с кардинальным числом $n+1$. Зафиксировав некоторый элемент a_0□M, разделим подмножества множества M на два типа:

1. содержащие a_0;
2. не содержащие a_0, то есть являющиеся подмножествами множества $M – \{a_0\}$.

Подмножеств типа (2) по предположению 2^n. Но подмножеств типа (1) ровно столько же, так как подмножество типа (1) получается из некоторого и притом единственного подмножества типа (2) добавлением элемента a_0 и, следовательно, из каждого подмножества типа (2) получается этим способом одно и только одно подмножество типа (1). Поэтому число всех подмножеств множества M равно $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Пример. Дано множество M={a,b,c}. Запишем все его подмножества P(M)={{a,b,c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a}, {b}. {c}, {0}}. Сопоставим каждому подмножеству двоичный вектор, состоящий из 3-х разрядов следующим образом: на позиции в которой элемент множества присутствует ставится 1, в противном случае ставиться 0. Таким образом, множество двоичных векторов, соответствующих булеану будет иметь следующий вид Р(2)= {{1,1,1}, {1,1,0}, {1,0,1}, {0,1,1}, {1,0,0}, {0,1,0}. {0,0,1}, {0,0,0}}. Отсюда видно, что соответствие между элементами булеанов Р(М) и Р(2) является взаимно-однозначным, что говорит о равенстве мощностей множеств.

Два бесконечных множества называются равномощными если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Свойства бесконечных и конечных множеств отличаются, так как в бесконечном множестве мощности множеств и их подмножеств могут быть равными.

Множества, которые можно поставить во взаимно-однозначное соответствие натуральному ряду, то есть пронумеровать элементы множества, называются счетными множествами. Множество A называется ***счётным множеством***, если оно равномощно множеству натуральных чисел N : $|A| = |N|$.

Упражнения

1. Приведите пример взамиооднозначного множества при использовании множества дисциплин и двоичного вектора, состоящего из 4-х разрядов.

2. Приведите пример взамиооднозначного множества при использовании множества компетенций и двоичного вектора, состоящего из 3-х разрядов.

3. Осуществите соответствие между целыми и натуральными числами для Z = { 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3,...,}.

Вопросы для повторения

1. При каких условиях соответствия являются взаимно-однозначными?
2. Что называют булеаном множества?
3. Какие множества являются счетными?
4. В чем заключается смысл теоремы Кантора?
5. Что называют континуумом?

3.3. Гомоморфизмы и изоморфизмы

Пусть между множествами A и B установлено соответствие $Г$ – отображение A в B, т.е. $Г: A \to B$. Это означает, что каждому элементу a из A поставлен в соответствие $Г$ единственный элемент b из B, т.е. $Г(a) = b$. Пусть также на множестве A задана операция φ, на множестве B - операция ψ, обе одинаковой арности, например обе бинарные, так что $a_1 \varphi a_2 = c$, $a1, a2, c \in A$, и $b_1 \psi b_2 = \gamma$, где $b_1, b_2, \gamma \in B$. В результате получается две алгебры АЛ1=<А; φ> и АЛ2=<В; ψ>.

Тогда отображение $Г{:}A \to B$ называется ***гомоморфизмом*** алгебры АЛ1=<А; φ> в алгебру АЛ2=<В; ψ>, если выполняется условие:

$$Г(a_1 \varphi a_2) = Г(a_1) \psi Г(a_2) \qquad (3.1)$$

Условие гомоморфизма (3.1) требует (рис. 3.3), чтобы отображение *Г* результата $c = a_1\ \varphi\ a_2$ выполнения на множестве *A* операции φ над элементами a_1 и a_2, т.е. $Г\ (c) = Г(a_1\ \varphi\ a_2)$, совпадало с результатом γ выполнения на множестве *B* операции ψ над отображениями этих элементов, т.е. над $Г(a_1) = b_1$ и $Г(a_2) = b_2$.

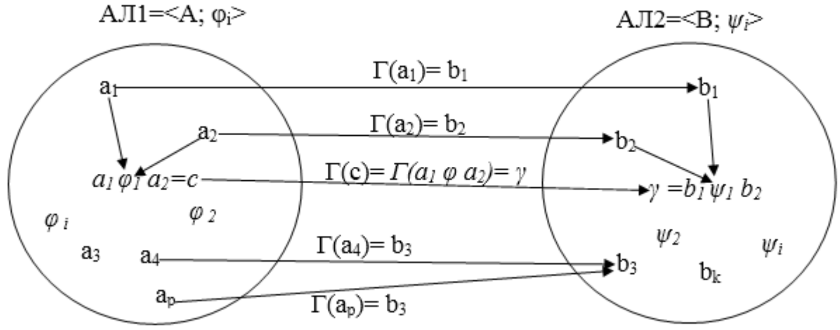


Рис. 3.3 – Гомоморфизм алгебр АЛ1 и АЛ2

В качестве примера гомоморфизма можно привести географическую карту. На карте населенные пункты представлены точкой, тогда как на самом деле они занимают значительную площадь. Мы можем измерить расстояние между населенными пунктами на земле, то есть в реальном масштабе или же измерить расстояние между точками на карте и умножить на масштаб. И в том и в другом случае результат будет идентичным с некоторой точностью (например, до метров).

Таким образом, видно, что при гомоморфизме происходит частичная потеря информации. На рисунке 3.3 значения a_4 и a_p в АЛ1 различные, а эти же точки в АЛ2 не различимы, так как представляют собой отображение b_3. То есть гомоморфизм представляет собой некоторое упрощение. Гомоморфизм является принципом любого точного моделирования, так как при моделировании происходит упрощение реального объекта в форме модели (например, уменьшается размер реального объекта). В противном случае модель была бы аналогична реальному объекту.

Если выполняется условие гомоморфизма и при этом отображение $Г: A \to B$ является взаимно-однозначным соответствием, то отображение называется ***изоморфизмом*** алгебры АЛ1=$<$А; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,\varphi_m$ $>$ на алгебру АЛ2=$<$В; $\psi_1, \psi_2, \ldots,\psi_m$ $>$.

Иначе говоря, отображение является изоморфизмом алгебры АЛ1=$<$А; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,\varphi_m$ $>$ на алгебру АЛ2=$<$В; $\psi_1, \psi_2, \ldots,\psi_m$ $>$, если выполняются условия:

- мощности множеств А и В равны;
- число операций АЛ1 равно числу операций АЛ2, то есть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,\varphi_m = \psi_1, \psi_2, \ldots,\psi_m$;
- арности операций совпадают, то есть если φ_1 унарная операция то и ψ_1 унарная, если φ_2 бинарная операция то и ψ_2 бинарная, и так далее.

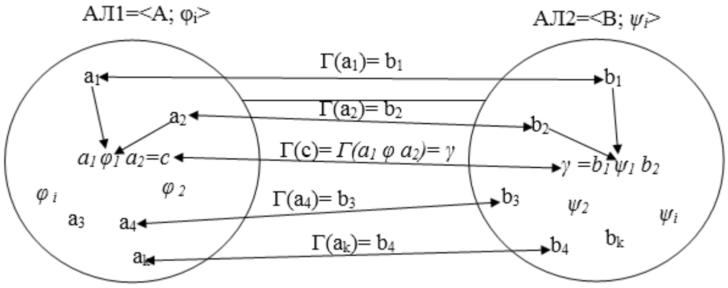


Рис. 3.4 – Изоморфизм алгебр АЛ1 и АЛ2

Две алгебры называются изоморфными, если существует такое взаимно-однозначное соответствие между элементами носителей А и В этих алгебр и их операциями φ_i и ψ_i, при котором имеет место соотношение 3.2.

$$Г(\varphi_i(a_{i1}, a_{i2}))) = \psi_i(Г(a_{i1}), Г(a_{i2})) \qquad (3.2)$$

В формуле 3.2. продемонстрированы только бинарные операции. На самом деле операции могут быть различной арности.

Основная идея гомоморфизма и изоморфизма заключается в том, что при выполнении операций из одной алгебры мы можем заменить их на выполнение операций из другой алгебры без потери точности вычисления. К данному приему прибегают, когда выполнение операций сложно и их отображают в алгебру, где процесс вычисления исходных операций через их отображения упрощен, то есть осуществляется по более легкому пути или с меньшим задействованием вычислительных ресурсов. Если вернуться к примеру с картой, то видно, что проще рассчитать расстояние от одного населенного пункта до другого, используя карту, нежели осуществлять замер на реальной земной плоскости.

В случае если выполняется условие изоморфизма, существует обратное отображение $Г^{-1}: B \rightarrow A,$ также взаимно-однозначное:

$$Г^{-1}(b_1 \psi b_1) = Г^{-1}(b_1) \varphi Г^{-1}(b_2).$$

Отображение $Г^{-1}$ - это изоморфизм *В* на *А.* Если существует изоморфизм *А* на *В,* то существует изоморфизм *В* на *А.* При этом алгебры АЛ1=<А; $\varphi_1, \varphi_2, ...,\varphi_m$ > и АЛ2=<В; $\psi_1, \psi_2, ...,\psi_m$ > называются *изоморфными.*

Другими словами, если на множествах *А* и *В* заданы несколько операций соответственно $<A; \varphi_1, \varphi_2, ...,\varphi_m>$ и $<B; \psi_1, \psi_2, ...,\psi_m>$, отображение $Г: A\rightarrow B$ является гомоморфизмом алгебры <А; $\varphi_1, \varphi_2, …,\varphi_m$> в алгебру $<B; \psi_1, \psi_2, ...,\psi_m>$, если условия, аналогичные (3.1), выполняются для каждой пары операций φ_1 и ψ_1, …, φ_m и ψ_m.

В силу взаимной однозначности соответствия $Г: A \rightarrow B$ при изоморфизме мощности основных множеств изоморфных алгебр равны. Поэтому проверка алгебр на изоморфизм сводится к проверке условия гомоморфизма для каждой пары операций и установления взаимной однозначности соответствия *Г* (равной мощности множеств *А* и *В*).

Аналогично определяется гомоморфизм (изоморфизм) множеств с отношениями - моделей МО1=$<A; R_1, R_2, …, R_n>$ и МО2= $<B; R_1', R_2', …, R_n'>$.

Понятие изоморфизма - одно из важнейших понятий в современной математике. Так, из условия изоморфизма следует, например, что любое эквивалентное соотношение в алгебре *АЛ1* сохраняется в любой изоморфной ей алгебре *АЛ2*. Это позволяет, получив такие соотношения в алгебре *АЛ1*, автоматически распространить их на все алгебры, изоморфные *АЛ1*. В частности, изоморфизм сохраняет свойства ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности операций, а также рассматриваемые выше свойства отношений.

Пример. Пусть M_1, - множество сотрудников организации и R_1 - заданное на нем отношение «быть старше»; M_2 - конечное множество натуральных чисел (ограниченное числом 75) и R_2 - заданное на нем отношение «быть больше». Гомоморфны или изоморфны модели МО*1* $=<M_1;\ R_1=$*быть старше*$>$ и *МО2* $=<M_2;\ R_2=$быть больше$>$?

Во первых посмотрим гомоморфны ли модели. Определим отображение $Г:M_1\rightarrow M_2$: каждому сотруднику организации из M_1, поставим в соответствие $Г$ число из M_2, соответствующее его возрасту (в годах). Установленное таким образом отображение $Г:M_1\rightarrow M_2$, является гомоморфизмом моделей МО*1* $=<M_1;\ R_1=$*быть старше*$>$ и *МО2* $=<M_2;\ R_2=$быть больше$>$, так как выполняется условие (3.2): «если *Иванову* 37 лет то он старше *Петрова* 26 лет», т.е. «*Иванов > Петров».*

Так как *Г(«Иванов») = 37* и *Г*(«*Петров»)*= 26, то и 37 > 26.

Установленное отображение $Г:M_1\rightarrow M_2$, не является изоморфизмом моделей МО*1* $=<M_1;\ R_1=$*быть старше*$>$ и *МО2* $=<M_2;\ R_2=$быть больше$>$, так как не является в общем случае взаимно однозначным (если в организации имеются сотрудники одного возраста, например «*Петров»* 26 лет и «*Сидоров»* 26 лет. В этом случае обратное соответствие $Г^{-1}$ не является отображением, поскольку не функционально (отсутствует единственность образа 26 на множество сотрудников организации).

Таким образом, заданные модели МО*1* $=<M_1;\ R_1=$*быть старше*$>$ и *МО2* $=<M_2;\ R_2=$быть больше$>$ гомоморфны, но не изоморфны.

Упражнения

1. Допустим необходимо измерить расстояние между городами. Необходимо сформулировать два способа, описать их алгебры и установить гомоморфны (изоморфны) ли они.
2. Глобус является моделью Земли. Опишите алгебру и модель работы с глобусом.

Вопросы для повторения

1. В чем суть гомоморфизма?
2. В чем суть изоморфизма?
3. Что с позиции моделирования систем дают понятия изоморфизм и гомоморфизм?

Раздел 2. Комбинаторика

Комбинаторика представляет собой раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисление элементов) и отношения на них (например, частичного порядка).

Элементы комбинаторики могут использоваться в процессе построения математического обеспечения систем основанных на знаниях, когда требуется посчитать, например, количество возможных решений или определить возможные конфигурации решений. Термин "комбинаторика" был введён Готфрид Вильгельм Лейбницем в опубликованной статье "Рассуждения о комбинаторном искусстве".

Глава 4. Комбинаторные конфигурации

4.1. Комбинаторные конфигурации и выборки

Решение практических задач, например, прикладных задач в области построения систем, основанных на знаниях, требует поиска всех возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих заданным условиям, и подсчитать количество таких комбинаций. Выражаясь языком теории множеств, данная задача звучит следующим образом: пересчитать и перечислить элементы конечных множеств.

Комбинаторная задача – задача поиска всех возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих заданным условиям, и подсчета количества таких комбинаций.

Примером, комбинаторной задачи может служить игра «крестики нолики». Здесь в зависимости от хода соперника необходимо представить все возможные варианты хода, а интеллектуальная система уже будет анализировать каждый вариант на предмет оптимальной тактики игры.

При формулировании и решении комбинаторных задач используются различные модели комбинаторных конфигураций (схем). К основным типам комбинаторных конфигураций относятся 2 наиболее часто употребляемые схемы:

1. Посчитать число конфигураций заданного типа, то есть определить мощность множества конфигураций.

Пример. Дано k предметов. Их нужно разместить по n ящикам так, чтобы выполнялись заданные ограничения. Сколькими способами это можно сделать?

2. Перечислить все конфигурации или дать метод перечисления, таким образом, чтобы в это перечисление попали все конфигурации и ни какая конфигурация при этом не повторялась бы.

Пример. Рассмотрим множество функций вида $F : X \to Y$, где $|X| = k$, $|Y| = n$, $X = \{1,2,......k\}$. Без ограничения общности можно считать, что

$Y=\{1,2,......,n\}$, $F=\langle F(1),F(2),......,F(k)\rangle$, $1\le F(i)\le n$. Сколько существует функций *F*, удовлетворяющих заданным ограничениям?

В комбинаторных конфигурациях оперируют понятием выборка.

Выборка - линейная конфигурация, то есть конфигурация, располагаемая в одномерную последовательность.

(n,k) – общее обозначение выборки. Из множества, состоящего из *n* элементов, некоторым образом выбираем и располагаем *k* элементов. Это выборка, состоящая из *к* элементов, выбранная из множества содержащего *n* элементов.

Выборки различаются по двум параметрам:

1. Допускается ли повторять или не повторять один и тот же элемент. Например, если мы выбираем из урны разносортные шары (все отличаются друг от друга), то ясно, что повторений не будет. Если мы строим произвольную последовательность символов, из какого-то алфавита, то ясно, что повторения будут сколько угодно раз.

2. Порядок важен или нет. Выборка, в которой порядок важен, называется размещением, а выборка, в которой порядок не важен, называется сочетанием.

Упорядоченная выборка – выборка, в которой задан порядок следования элементов.

Неупорядоченная выборка – выборка, в которой порядок следования элементов несущественен.

Четыре основных вида линейных выборок:

- размещения с повторениями;
- размещения без повторений;
- сочетания с повторениями;
- сочетания без повторений.

Примечание! Когда речь идет о выборках с повторениями, то в формулах фигурируют степени. В случае выборок без повторений в формулах фигурируют факториалы.

Вопросы для повторения

1. Какие задачи называют комбинаторными?
2. Что называют комбинаторными конфигурациями?
3. Назовите основные типы комбинаторных конфигураций.
4. Что называется выборкой?
5. По каким параметрам различаются выборки?
6. Назовите основные виды линейных выборок?

4.2. Правила суммы и произведения

Пусть X – конечное множество, состоящее из n элементов. Тогда говорят, что объект $x \in X$ можно выбрать n способами, где $|X| = n$.

Рассмотрим набор попарно непересекающихся множеств $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$. Воспользуемся равенством, описанным в разделе теория множеств $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Условие попарно непересекающихся множеств говорит о том, что мощности всех возможных пересечений на наборе множеств $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$ равны нулю (данное заключение становится очевидным из постановки комбинаторных задач, где говорится о том, что перечислить все возможные комбинации без повторения).

Правило суммы - мощность объединения попарно непересекающихся множеств $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$ равна сумме мощностей отдельно взятых X_i множеств.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$$

Для k=2 правило суммы выглядит следующим образом: если объект x можно выбрать m способами, а объект y – другими n способами, то выбор «либо x, либо y» можно осуществить $m+n$ способами.

Из правила суммы следует: если Вы желаете посчитать мощность множества, которое описано как некоторая комбинация из каких-то подмножеств, то старайтесь выделить не пересекающиеся множества (если этого не сделать, то будет вероятность того, что некоторые элементу будут подсчитаны дважды).

Другим часто применяемым в комбинаторике правилом является ***правило произведения***.

Рассмотрим систему множеств $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$, на которой мы хотим организовать выборку, выбрав по одному элементу из каждого множества. Данная выборка может быть осуществлена $|X_1| * |X_2| * \ldots |X_к|$ способами.

Если объект x можно выбрать m способами и после каждого из таких выборов объект y в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор «x и y» в указанном порядке можно осуществить $m*n$ способами.

Упражнения

1. Сформулируйте задачи, к которым применимы правила суммы и произведения.

Вопросы для повторения

1. В чем заключается правило суммы?
2. В чем заключается правило произведения?

Глава 5. Размещения

5.1. Размещения с повторениями

Размещения с повторениями - упорядоченные выборки объемом k из n элементов, где элементы могут повторяться.

Их число обозначается $\tilde{A}_n^к$. При этом k может быть больше n. Размещения с повторениями не являются подмножествами, так как элементы в выборках могут повторяться.

Пусть дано множество $M=\{a,b,c\}$. Сколько существует способов построения последовательности из 4 символов? Примерами таких последовательностей могут служить $\{a,b,b,c\}$, $\{a,b,c,a\}$,….. То есть это размещение, где порядок каждой буквы важен, буквы могут повторяться, но и не обязательно все буквы в этой последовательности должны быть. Для подсчета количества возможных последовательностей достаточно применить правило произведения.

Будем считать, что в нашей выборке 4 места (1е, 2е, 3е и 4е). На каждое место мы выбираем элемент из исходного множества *M*. То есть мы имеем $|M|^к = 3^4 = 81$.

Теорема. Число размещений с повторениями считается по следующей формуле $\tilde{A}_n^к = n^k$.

Доказательство. Первый элемент может быть выбран n способами, второй элемент также может быть выбран n способами и так далее, k -й элемент также может быть выбран n способами. По принципу произведения получаем n^k.

Пример. Кодовый замок состоит из четырех разрядов, в каждом разряде независимо от других могут быть выбраны цифры от 0 до 9. Сколько возможных комбинаций?

Здесь n = 10, m = 4. Следовательно, $\tilde{A}_{10}^4 = 10^4$.

Упражнения

1. Возьмем буквы Г, О, П, Р. Какие размещения из этих букв, взятых по три, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если буквы могут повторяться?

2. Вдоль дороги стоят 5 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

3. Имеется набор дисциплин: распределенные системы, английский язык, анализ данных, маркетинг, дискретная математика. Необходимо составить расписание на один из учебных дней, при условии, что в нем будут находиться лишь 3 дисциплины. Сколько вариантов расстановки возможно (допускается два повторения)?

Вопросы для повторения

1. Что называют размещениями с повторениями?
2. Важен ли порядок в размещениях?
3. Какую роль играет правило произведения при подсчете размещений?

5.2. Размещения без повторений

Размещения без повторений - упорядоченные выборки объемом k из n элементов, где элементы не могут повторяться.

Их число обозначается $A_n^к$. При этом $k \le n$. Размещения без повторений являются подмножествами, так как элементы в выборках не повторяются.

Теорема. Число размещений без повторений считается по следующей формуле $A_n^к = \dfrac{n!}{(n-к)!}$.

Доказательство. Если необходимо осуществить выборку n элементов на k мест (например, урна с шарами различного цвета), используя размещения без повторений, то на первое место мы можем выбрать из n-элементов, на второе место из $(n-1)$ элементов, на третье место из $(n-2)$ элементов, …. на m место из $(n-k+1)$ элементов, то есть $n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)$. Придадим формуле более компактный вид, помножив и разделив ее на $(n-k)*(n-k-1)*....*1=(n-k)!$

Уравнение примет следующий вид:

$$\frac{n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)*(n-k)*(n-k-1)*....*1}{(n-k)*(n-k-1)*....*1}$$

В результате получится следующее выражение $\dfrac{n!}{(n-к)!}$.

Пример. Группа из 15 человек выиграла 3 различных книги. Сколько существует способов распределения этих книги среди группы?

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{12!} = 15*14*13 = 2730.$$

Упражнения

4. В конкурсе принимает участие 27 человек. Сколькими способами можно присудить первую, вторую и третью премии?
5. Сколько можно составить телефонных номеров из 5 цифр каждый, так чтобы все цифры были различны?
6. Сколькими способами 3 юноши могут пригласить 5 из 7 девушек на танец?

7. Сколькими способами можно расставить 7 книг на полку для 5 книг?

Вопросы для повторения

1. Какие выборки называют размещениями без повторений?
2. Важен ли порядок в данных выборках?
3. Что такое факториал?

5.3. Перестановки без повторений

Перестановки без повторений - упорядоченные выборки, объемом n из n элементов, где все элементы различны.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n. При этом $k = n$. Перестановки без повторений являются подмножествами, так как элементы в выборках не повторяются и являются частным случаем размещений без повторений.

Из определения следует, что две упорядоченные выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, являются различными.

Теорема. Число перестановок без повторений считается по следующей формуле $P_n = n!$

Доказательство. Исходя из того, что число размещений без повторений считается по формуле $A_n^к = \frac{n!}{(n-к)!}$ приравняем $k = n$. Отсюда получаем $A_n^{k=n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$. Из свойств факториала известно, что $0! = 1$, следовательно $A_n^{k=n} = n! = P_n$.

Пример. Сколько существует способов, чтобы расположить на полке 10 различных книг? Ответ: 10!

Можно рассуждать иначе. Выбираем первый элемент, это можно сделать n способами. Затем выбираем второй элемент, это можно сделать $(n-1)$ способами. По правилу произведения упорядоченный выбор двух элементов можно осуществить $n*(n-1)$ способами. Затем выбираем третий элемент, для его выбора останется $(n-2)$ возможности, последний элемент можно выбрать единственным способом. Мы вновь приходим к формуле: $n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)$, которая с учетом $k = n$ принимает вид $n*(n-1)*(n-2)*...*(n-(k-1)+1)*1$.

Если необходимо осуществить выборку n элементов на k мест (например, урна с шарами различного цвета), используя размещения без повторений, то на первое место мы можем выбрать из n-элементов, на второе место из $(n-1)$ элементов, на третье место из $(n-2)$ элементов, …. на m место из $(n-k+1)$ элементов, то есть $n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)$. Придадим формуле более компактный вид, помножив и разделив ее на $(n-k)*(n-k-1)*....*1=(n-k)!$

Упражнения

1. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, если цифры в числе не повторяются?
2. Имеется набор дисциплин: стратегический менеджмент, развитие информационного общества, экономика фирмы, линейная алгебра, исследование операций, управление разработкой ИС, физическая культура. Перед студентами, участвующими в анонимном опросе поставлена задача: каждый должен пронумеровать список дисциплин в порядке возрастания в зависимости от важности дисциплины для него. Сколько возможных перестановок может быть в данном случае?

Вопросы для повторения

1. Какие выборки называют перестановками?
2. Важен ли порядок в перестановках?
3. Почему перестановки без повторений называют частным случаем размещений?

Глава 6. Сочетания

6.1. Сочетания без повторений

Сочетания - неупорядоченные выборки объемом *к* из *n* элементов $k \le n$.

Их число обозначается $C_n^к$. Когда говорят просто сочетания, то имеют ввиду сочетания без повторений.

Представим, что мы сделали некоторые размещения и посчитали их число. Пусть дано множество $M = \{a, b, c\}$ и мы делаем размещение без повторений из множества M по 2 местам. $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$. То есть мы сделали выборки $\{ab, ac, bc, ba, ca, cb\}$. А теперь мы говорим, что порядок расположения элементов нам на самом деле не важен. Это означает, что выборки, которые до этого считались разными, теперь считаются как одно и тоже, то есть $\{ab = ba, ac = ca, bc = ca\}$. Представьте себе было какое-то количество элементов, где были одни и те же элементы только по-разному расставлены, то есть это одно и тоже сочетание, но разные размещения. Поэтому необходимо ответить на вопрос во сколько раз сочетаний будет меньше, чем размещений без повторений? То есть сколькими способами эти элементы можно переставить.

Иначе говоря, число сочетаний из *n* по *к* это число размещений $A_n^к$ деленное на число перестановок *к* элементов $P_к$. Итак

$$C_n^к = \frac{A_n^к}{P_к} = \frac{\frac{n!}{(n-к)!}}{к!} = \frac{n!}{(n-к)!*к!}.$$

Теорема. Число сочетаний без повторений считается по следующей формуле $C_n^к = \frac{n!}{к!(n-к)!}$.

Доказательство. Очевидно, $A_n^к = C_n^к к!$. Действительно, объект *А* – неупорядоченная выборка из *n* элементов по *k*, их число $C_n^к$. После того, как эти *к* элементов отобраны, их можно упорядочить *к*! способами (в роли объекта *В* выступает «порядок» в выборке). Совместный выбор «*А* и *В*» – упорядоченная выборка.

Пример. Группа из 15 человек выиграла 3 одинаковых книги. Сколькими способами можно распределить эти книги?

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!\,12!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 455$$

Упражнения

1. В группе 25 человек. Сколько существует способов выбора из них делегации из трех человек для участия в профсоюзной конференции.

2. Группу из 25 туристов нужно распределить по 3 маршрутам так, чтобы по первому маршруту шли 7 человек, по второму — 9, по третьему — 4. Сколькими способами это можно сделать?

3. По ФГОС имеется 7 предметов учебного цикла, 3 дисциплины математического цикла и 15 дисциплин профессионального цикла. Из них в семестре должно быть изучено 2 дисциплины учебного цикла, 2 математического цикла и 4 профессионального цикла. Сколькими способами это можно организовать?

Вопросы для повторения

1. Какие выборки называют сочетаниями?
2. Какие основные комбинаторные конфигурации необходимо знать для понимания сочетаний?
3. Имеет ли значение порядок в сочетаниях?

6.2. Биномиальные коэффициенты и их свойства

Числа $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ называются ***биноминальными коэффициентами***. Из этой формулы следует, что $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n\text{-}k}}$.

Рассмотрим бином ньютона $(x+y)^n = \sum\limits_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{i}} * x^{n-i} * y^i$

Рассмотрим данную формулу на конкретном примере. Например, определим $n=4$. Можно сделать следующим образом $(x+y)^4 = (x+y)*(x+y)*(x+y)*(x+y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 =$ $= C_4^0x^4 + C_4^1x^3y + C_4^2x^2y^2 + C_4^3xy^3 + C_4^4y^4$. То есть все сочетания C_n^i являются коэффициентами после раскрытия скобок, откуда и следует название биномиальные коэффициенты.

<u>Свойства биномиальных коэффициентов:</u>

1. Центральная симметрия $n-k$ и k : $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n\text{-}k}}$. Это следует из формулы для бинома Ньютона $(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$, то есть 1-4-6-4-1.

2. $2^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i$.

3. $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n\text{-}1}}^{\mathrm{n\text{-}k}} + \mathrm{C}_{\mathrm{n\text{-}1}}^{\mathrm{k}}$.

Соотношение $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n\text{-}1}}^{\mathrm{n\text{-}k}} + \mathrm{C}_{\mathrm{n\text{-}1}}^{\mathrm{k}}$ наглядно иллюстрируется конструкцией под названием треугольник Паскаля.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Каждый элемент *i* уровня находится в промежутке между двумя элементами *i-1* уровня. Закономерность: по краям треугольник стоят 1. Каждый элемент на *i*-ом уровне является суммой двух элементов на *i-1* уровне, между которыми он находится.

А теперь, что представляет собой каждая строка? Это последовательность всех биномиальных коэффициентов для *n-1* равного номеру уровня.

Номер уровня		Биномиальные коэффициенты
0	1	C_0^0
1	1 1	C_1
2	1 2 1	C_2
3	1 3 3 1	C_3
4	1 4 6 4 1	C_4
5	1 5 10 10 5 1	C_5

N	1 5 10 … 10 5 1	C_n

То есть каждый слой треугольника Паскаля вычисляется ровно по формуле $C_n^k = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-1}^k$.

Рассмотренные нами комбинаторные конфигурации являются вычислительной основой теории вероятности. Так как практически всякую задачу о числе выборок можно переформулировать как задачу вероятности: «Какова вероятность того, что мы случайным образом получим именно эту выборку». Например, задача на то сколькими способами мы можем выбрать из колоды карт 2 тузов, пере формулируется как вероятностная задача: «Какова вероятность того, что, вытаскивая из колоды 2 карты мы получим 2 туза».

Упражнения

1. Проверьте, что $(x+y)^2 = C_2^0 x^2 y^0 + C_2^1 x^1 y^1 + C_2^2 x^0 y^2$.
2. Проверьте, что $(x+y)^3 = C_3^0 x^3 y^0 + C_3^1 x^2 y^1 + C_3^2 x^1 y^2 + C_3^3 x^0 y^3$..
3. Напишите разложение выражения $(x+y)^6$ по формуле бинома Ньютона.

4. Найдите коэффициент бинома Ньютона для пятого члена разложения выражения $(x+y)^7$.

Вопросы для повторения

1. Какие числа называют биномиальными коэффициентами?
2. Опишите свойства биномиальных коэффициентов.
3. Что такое треугольник паскаля?
4. В чем особенность уровней биномиальных коэффициентов в треугольнике паскаля?
5. В каких задачах можно использовать треугольник паскаля?

6.3. Перестановки с повторениями

Рассмотрим перестановки, которые не являются подмножествами.

Пусть имеется n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа и т.д., k_s элементов s-го типа, причем $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$. Упорядоченные выборки из таких n элементов по n называются ***перестановками с повторениями***, их число обозначается $C_n(k_1,k_2,\ldots,k_s)$. Числа $C_n(k_1,k_2,\ldots,k_s)$. называются полиномиальными коэффициентами.

Теорема о полиномиальных коэффициентах.

$$C_n(k_1,k_2,\ldots,k_s)=\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{k}_1!\mathrm{k}_2!..\mathrm{k}_s!}.$$

Доказательство проведем по индукции по s, т. е. по числу типов элементов. При $s=1$ утверждение становится тривиальным: $k_1=n$, все элементы одного типа и $C_n(n)=1$. В качестве базы индукции возьмем $s=2$, $n=k_1+k_2$. В этом случаем перестановки с повторениями превращаются в сочетания из n элементов по k_1 (или k_2): выбираем k_1 место, куда помещаем элементы первого типа.

$$C_n(k_1,k_2)=C_n^{\mathrm{k}_1}=\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{k}_1!(n-\mathrm{k}_1)!}=\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{k}_1!\mathrm{k}_2!}$$

Пусть формула верна для $s=m$, т.е. $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$ и

$$C_n(k_1+k_2+\ldots+k_m)=\frac{\mathrm{n}!}{k_1!k_2!..k_m!}$$

Докажем, что она верна для $s=m+1$**,** т.е. $n=k_1+k_2+\ldots+k_m+k_{m+1}$. В этом случае перестановку с повторениями можно рассматривать как совместный выбор двух объектов: объект *A* – выбор k_{m+1} места для элементов $(m+1)$-го типа; объект *B* – перестановка с повторениями из $(m-k_{m+1})$ элементов. Объект *A* можно выбрать $\mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{k}_{\mathrm{m+1}}}$ способом, *B* –

$C_{n\text{-}k_{m+1}}(n = k_1, k_2, ..., k_m)$ способами. По принципу произведения получается требуемая формула:

$$C_n(k_1,\dots,k_m,k_{m+1}) = C_n^{k_{m+1}} \times C_{n\text{-}k_{m+1}}(k_1,\dots,k_m) =$$
$$= \frac{n!}{(k_{m+1})!(n\text{-}k_{m+1})!} \times \frac{(n\text{-}k_{m+1})!}{k_1!k_2!\dots k_m!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!k_{m+1}!}$$

Пример. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Решение. Буква «а» входит 3 раза $(k_1 = 3)$, буква «м» – 2 раза $(k_2 = 2)$, «т» – 2 раза $(k_3 = 2)$, буквы «е», «к», «и» входят по одному разу, отсюда $(k_4 = k_5 = k_6 = 1)$.

$$C_{10}(3,2,2,1,1,1) = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$$

Упражнения

1. Сколькими способами можно переставить буквы слова «параллельный»?
2. Имеется семь штор, три из которых совершенно одинаковых цвета и фасона. Сколькими способами можно развесить эти шторы по семи окнам?
3. Сколько «слов» можно получить, переставляя местами буквы в словосочетании «точка бифуркации» (пробел считается)?

Вопросы для повторения

1. Какие выборки называют перестановками с повторениями?
2. Объясните теорему о полиномиальных коэффициентах.
3. Важен ли порядок в перестановках с повторениями?

6.4. Сочетания с повторениями

Рассмотрим сочетания, которые не являются подмножествами. Пусть дано n элементов и мы выбираем $к$ элементов, причем некоторые из них могут повторяться.

Например, $n = 5$, то есть у нас имеется 5 элементов $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Запишем элементы сочетания, точнее только их номера (1, 3, 3, 5), как видно здесь повторяются элементы с номерами 3, следовательно, мы имеем дело с сочетаниями с повторениями.

Примечание:

1. элементы могут повторяться, но не обязаны повторяться.

2. $к$ может быть больше n, чего не может быть в сочетании без повторения.

Остается вопрос «Как посчитать величину сочетания с повторением?» Это можно сделать следующим образом.

Пусть у нас есть некоторая (n,k)-выборка с повторениями. Поскольку в сочетании порядок не важен, давайте элементы данного сочетания расположим, например, по возрастанию (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5). Будем считать, что эти элементы упорядочены по возрастанию, то есть $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$, знак $\le$, так как соседние элементы могут быть одинаковы. Тогда поставим каждому такому сочетанию во взаимно-однозначное соответствие сочетание без повторения, а именно построим выборку (d_1,d_2,d_3,d_4,d_5), а элементы d определим следующим образом $(d_1=a_1,d_2=a_2+1,d_3=a_3+2,d_4=a_4+3,d_5=a_5+4)$. Это для случая $k=5$. А в общем случае, когда имеется конструкция $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\dots,a_k)$, мы получим $(d_1=a_1,d_2=a_2+1,d_3=a_3+2,d_4=a_4+3,d_5=a_5+4,\dots,d_k=a_k+k-1$. Это сочетание будет уже без повторений. Например, если выборка для (2, 3, 3, 5, 6), то для d она будет иметь вид (2, 4, 5, 8, 10).

Таким образом, мы построили сочетания без повторений, причем каждое сочетание без повторений взаимно-однозначно соответствует сочетанию с повторением, но оно теперь выбирается не из n элементов, а из $n+k-1$ элементов.

Так как мы установили взаимно-однозначное соответствие, что говорит о равенстве мощностей множеств, то мы можем записать следующее:

$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$, то есть число сочетаний с повторениями по n элементам равняется числу сочетаний без повторений по $n+k-1$ элементам.

Упражнения

1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 6, 9, 7, 1?

2. В кондитерском магазине продавались 5 видов сока: томатный, персиковый, виноградный, апельсиновый, яблочный. Сколькими способами можно купить 9 упаковок?

3. В книжный магазин поступили романы Ф. Купера «Прерия», «Зверобой», «Шпион», «Пионеры», «Следопыт» по одинаковой цене. Сколькими способами библиотека может закупить 17 книг на выбранный чек?

Вопросы для повторения

1. Являются ли сочетания с повторениями подмножествами?
2. Какие выборки называют сочетаниями с повторениями?
3. Важен лив сочетаниях порядок?
4. Может ли быть количество мест для выборки больше числа элементов?

Раздел 3. Математическая логика

Логика - наука о формах, методах и законах интеллектуальной познавательной деятельности, формализуемых с помощью логического языка.

Таким образом, логика (в частности применительно построения искусственных интеллектуальных систем) представляет собой совокупность средств получения новых логически верных знаний из имеющихся.

Основы логики заложены в работах Аристотеля об учении о силлогизме. Силлогизм есть доказательство, состоящее из трех частей: *большая посылка, меньшая посылка* и *заключение*. Имеется несколько модусов силлогизма, каждому из которых присвоены название. Самым общеизвестным является модус, названный "Barbara".

Все люди смертны (*большая посылка*). Сократ — человек (*меньшая посылка*). Следовательно, Сократ смертен (*заключение*).

Математическая логика предоставляет средства для построения систем, оперирующих знаниями. С помощью ее средств становится возможным формализовать и структурировать знания, представленные на естественном для человека языке, а также получать логический вывод из имеющихся знаний, например, доказывать теоремы или следствия из посылок.

В разделе математическая логика описана логика высказываний и ее алгебра. Представлены основные схемы логически верных рассуждений. Обоснована необходимость при построении интеллектуальных информационных систем использования в процессе получения логического вывода дедуктивных рассуждений. Представлен метод доказательства теорем основанный на правиле резолюций. При этом даны формальные описания каждого этапа метода резолюций.

Логика высказываний, основанная на двоичной логике ярким примером, является булева алгебра, не являющаяся единственным математическим средством способным к логическому выводу. Альтернативой может служить троичная логика, которая помимо состояний ложно и истинно может формировать промежуточное третье состояние. В 70е годы XXвека Брусенцовым Н.П. и его командой была реализована ЭВМ Сетунь основанная на троичной логике. Однако, по неизвестным причинам она не стала в серийное производство.

Другим средством формализации в математической логике является логика предикатов. Благодаря введению множественного значения переменным (переменные могут принимать значение не только либо 0, либо 1, а любое значение из области определения) и кванторов, данный вид логических рассуждений является более эффективным. При этом результат логического рассуждения может быть либо истинным, либо ложным.

Представленные выше средства логического представления объектов реального мира эффективны, когда у разработчика имеются структурированные знания и зависимости. В случае слабо формализуемых систем, когда сведения об объекте управления представлены не в количественном, а в качественном виде, данные подходы могут быть применены, но при этом необходимо будет вводить дополнительные ограничения, строить громоздкую базу знаний за счет излишних правил и тому подобное. В некоторых случаях данные подходы и вовсе неприменимы. При описании подобных систем хорошо показала себя нечеткая логика, основанная на нечетких множествах, описанных впервые Лотфи Заде. Нечеткая логика легко оперирует качественными значениями и не противоречит законам логики.

Таким образом, имея представления о способах получения логических выводов, специалист в области построения интеллектуальных информационных систем будет способен изучив предметную область, определить способ, наиболее подходящий для ее формализации. И в зависимости от выбранного способа определить средства и механизмы получения логического вывода, так как результатом работы интеллектуальной системы могут быть рекомендации, управленческие решения, варианты решения и другие результаты, представляющие собой в конечном счете логический вывод.

Глава 7. Введение в логику высказываний

7.1. Логические связки

В *математической логике* изучаются способы (правила) формального представления высказываний, построения новых высказываний из имеющихся с помощью логически выдержанных преобразований, а также способы (методы) установления истинности или ложности высказываний.

Высказывание - повествовательное предложение (утверждение, суждение), о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно*.

Примеры высказываний: «Бизнес-информатика направление подготовки кафедры прикладной информатики и информационных технологий», «Регистрация фирмы требует наличия ее устава», «Рубль - российская валюта», «Все люди смертны».

Истинность или ложность суждения зависит от того, к какой предметной области мы его относим, иными словами, в каком контексте употребляем.

Высказывание простое *(элементарное),* если оно рассматривается как некое неделимое целое (аналогично элементу множества). Простые высказывания принимают либо истинное, либо ложное значение, но не то и другое вместе. Данные высказывания обычно не содержат логических связок.

Высказывание сложное *(составное)* - высказывание, составленное из простых с помощью *логических связок.*

В естественном языке роль связок при составлении сложных предложений из простых играют следующие грамматические средства:

- союзы «и», «или», «не»;

- слова «если то», «либо ... либо» (в разделительном смысле), «тогда и только тогда, когда» и др.

Средства логики высказываний позволяют формализовать естественный язык и используются для построения интеллектуальных информационных систем.

Основные логические связки (операции) логики высказываний.

Конъюнкция *(операция «И»)* высказываний **А** и **В** - высказывание, истинное, когда оба высказывания истинны, и ложное - во всех других случаях.

Пример. Для укола необходимы шприц и лекарство. Высказывание состоит из двух простых: *А* – «для укола необходим шприц», *В* – «для укола необходимо лекарство». Высказывания *А* и *В* соединены связкой «и», следовательно, выражение истинно только при одновременной истинности двух высказываний.

Дизъюнкция *(операция «ИЛИ»)* высказываний **А** и **В** - высказывание, ложное в случае, когда оба высказывания ложны, и истинное - во всех других случаях.

Пример. У человека технический склад ума или гуманитарный. Высказывание состоит из двух простых: *А* – «у человека технический склад ума», *В* – «у человека гуманитарный склад ума». Высказывания *А* и *В* соединены связкой «или».

Отрицание *(инверсия)* высказывания *А* - высказывание, истинное, когда высказывание **А** ложно, и ложное - в противном случае.

Импликация *(логическое следование)* высказываний **А** и **В** - высказывание, ложное, когда А истинно, а **В** ложно; во всех других случаях - истинное. При этом высказывание **А** называется *посылкой* импликации, а высказывание **В**- *заключением.*

Пример. Модель «начальник подчиненный» характеризующая выполнение подчиненным распоряжений начальника. Допустим:

- А — начальник. Он может приказать «работай» (истинна) или сказать «делай что хочешь» (ложь).

- В — подчиненный. Он может работать (истинна) или бездельничать (ложь).

Следовательно, импликация высказываний А и В — послушание подчиненного начальнику. По таблице истинности видно, что послушания нет только тогда, когда начальник приказывает работать, а подчиненный бездельничает.

Эквивалентность *(эквиваленция, равнозначность)* высказываний *А* и **В** - высказывание, истинное, когда значения **А** и **В** совпадают, и ложное - в противном случае.

Пример. В зачетную книжку выставляется оценка тогда и только тогда, когда сдан экзамен. *А* – «Выставляется экзамен», *В* – «Экзамен сдан».

Неравнозначность *(исключающее "ИЛИ", сложение по модулю* 2) высказываний А и **В** - высказывание, истинное, когда значения **А** и **В** не совпадают, и ложное - в противном случае.

Пример. Сегодня понедельник или вторник. Высказывание состоит из двух простых: *А* – «Сегодня понедельник»; *В* – «Сегодня вторник». Высказывания *А*, *В* соединены связкой «или» в разделительном смысле**,** так как в один день не может быть и понедельник и вторник.

Логическая формула - выражение, составленное из обозначений высказываний и связок (и скобок), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- любая переменная, обозначающая высказывание является формулой;
- если А и *В* - формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $A \to B$, $A \sim B$, $A \oplus B$ **-** формулы;
- других формул нет.

Пример. Представить выражение «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые» логической формулой.

А – «Идет дождь», *В* **–** «Крыши мокрые». В первом предложении «Если идет дождь, то крыши мокрые» высказывания *А* и *В* соединены связкой «если…то» $A \to B$. Во втором **«**Дождя нет, а крыши мокрые» имеет смысл связки «и» и кроме этого высказывание *А* следует взять с отрицанием $\overline{A} \ \& \ B$. Объединив два высказывания в одно связкой & получается следующая логическая формула: $(A \to B) \& (\overline{A} \& B)$.

В алгебре логики логические связки и соответствующие им логические операции имеют специальные названия и обозначаются следующим образом:

Логическая связка	**Название логической операции**	**Обозначение**
не	Отрицание, инверсия	$\overline{A}, \neg A$
и, а, но	Конъюнкция, логическое умножение	$A \wedge B, AB$, A&B
или	Дизъюнкция, логическое сложение	$A \vee B, A + B$
если ..., то	Импликация, следование	$A \to B$
тогда и только тогда, когда	эквивалентность, эквиваленция, равнозначность	$A \approx B, A \equiv B, A \leftrightarrow B$
либо, либо	неравнозначность	$A \oplus B$

Упражнения

1. Определите тип логической связки для следующих высказываний:

а) если на компьютер установить два различных антивирусных программных продуктов, то будут проблемы;

б) сессия закрывается тогда и только тогда, когда сданы все зачеты и экзамены;

в) как правило, пользователь работает либо в операционной системе Windows, либо Linux;

г) на компьютере можно установить операционную систему Windows или Linux.

2. Записать составное высказывание в виде формулы, употребляя булевы переменные для обозначения простых высказываний и обосновать логическую истинность или ложность полученного высказывания (обоснование провести посредством анализа смысла посылок).

а) если компьютер постоянно зависает и некорректно работает, то на нем вирус;

б) для установки операционной системы необходимо обладать навыками программиста и системного администратора;

в) если компьютер работает со сбоями и медленно выполняет операции, то он либо устарел, либо заражен вирусом;

г) интеллектуальную систему нельзя построить без навыков построения баз знаний и механизмов логического вывода.

Вопросы для повторения

1. Что называют конъюнкцией?
2. Что называют дизъюнкцией?
3. Что делает логическая связка «отрицание»?
4. Какие логические связки называются импликацией?
5. Объясните сущность и принцип работы связки импликация?
6. Как работает операция эквивалентности?
7. Объясните работу операции «неравнозначность»?

7.2. Дедуктивные и индуктивные рассуждения

Языки логики высказываний содержат правила преобразования логических формул. Эти правила реализуют общие логические законы и тем самым обеспечивают логически правильные рассуждения.

Рассуждение (умозаключение) - процесс получения новых знаний, выраженных высказываниями, из других знаний, также выраженных высказываниями. Исходные высказывания называются ***посылками*** (гипотезами, условиями), а получаемые высказывания - ***заключением*** (следствием). С содержательной точки зрения умозаключение есть переход от уже имеющегося (наличного) знания к новому знанию. С формальной точки зрения умозаключение есть переход от посылок к следствию.

При построении интеллектуальных информационных систем необходимо проводить анализ высказываний и получать некий логический вывод (например, с целью получения новых знаний). В связи с этим необходимо различать два подхода рассуждений индуктивный и дедуктивный.

Индукция – это переход от частных утверждений к общему заключению. Умозаключение основано на анализе содержания посылок и следствия.

Дедукция – вывод частных заключений из общего утверждения. Умозаключение, прежде всего, основано на анализе формальной (логической) структуры посылок и следствия.

В дедуктивном рассуждении выводы следуют из предпосылок с логической необходимостью. То есть, если в дедуктивном рассуждении предпосылки истинны, то заключение просто не может быть ложным. **Пример:**

ВСЕ люди - смертны.

Сократ - ЯВЛЯЕТСЯ человеком

Следовательно, Сократ - смертен.

В данном примере не может быть ситуации, когда все посылки истинны, а вывод ложный. Не может быть ситуации, когда все люди смертны и Сократ человек, но при этом Сократ не смертен. Это и есть смысл, который мы вкладываем в понятия «ВСЕ» и «ЯВЛЯЕТСЯ», обозначающие соотношения между категориями вещей. Только из-за смысла слов, которые мы вкладываем в данное рассуждение, оно становится верным. Это получается не из-за каких-то свойств понятий «человек, смертен, Сократ», а исключительно из-за того как эти понятия связаны между собой вспомогательными связками «ВСЕ» и «ЯВЛЯЕТСЯ».

Верность рассуждения – это когда невозможно представить ситуацию, что все посылки истинны, а вывод ложный.

Обоснованное суждение - верное суждение, в котором все посылки действительно истинны. То есть, действительно «ВСЕ люди - смертны» и действительно «Сократ - ЯВЛЯЕТСЯ человеком».

Дедуктивное рассуждение может быть верным и обоснованным!!!

Следовательно, если рассуждение верное и обоснованное, то действительно невозможно представить ситуацию, когда «ВСЕ люди - смертны» и «Сократ - ЯВЛЯЕТСЯ человеком», но при этом Сократ бессмертен.

Пример неверного рассуждения, когда все посылки верные, а вывод не верный:

Все страны Евросоюза – в качестве валюты используют ЕВРО

Россия – это страна, не входящая в Евросоюз

Следовательно, валюта России - ЕВРО

Данное рассуждения не является верным. Обе посылки истинны, но при этом следствие не является истинным, так как валюта Россия – это РУБЛЬ. При этом нет противоречий между словами, входящими в данную конструкцию.

Пример верного, но не обоснованного рассуждения:

Все страны Европы – в качестве валюты используют ЕВРО

Россия – это страна Европы

Следовательно, валюта России – ЕВРО

Данное рассуждения не является обоснованным, так как не все страны Европы в качестве валюты используют ЕВРО, в некоторых используется собственная валюта (например, Россия).

Дедуктивные рассуждения не сообщат нового знания об окружающем мире, они поясняют дополнительные свойства слов, которые мы используем.

Пример:

У начальника Андрея есть подчиненные

Следовательно, у Андрея есть коллеги

Это верное рассуждение. Из-за смысла, вкладываемого в слова «НАЧАЛЬНИК», «ПОДЧИНЕННЫЕ» и «КОЛЛЕГИ», обозначающих соотношение сотрудников между собой, данное рассуждение является истинным.

Именно поэтому дедуктивные рассуждения хорошо легли в основу построения систем искусственного интеллекта, так как отсутствует необходимость вникания в смысл слов, входящих в состав высказываний. Необходимо просто анализировать слова связки и проверять корректность расстановки этих связок (верно ли что эти связки расставлены в определенной форме).

В индуктивных рассуждениях выводы следуют из предпосылок с некоторой степенью вероятности. Иными словами, в таком рассуждении истинность посылок не влечет за собой истинность вывода (данное определение не относится к математической индукции).

Пример индуктивного рассуждения**:**

90% людей правши.

Я человек.

Следовательно, я правша.

Вывод будет истинным только с 90% вероятностью.

Пример индуктивного рассуждения**:**

Обь – река Сибири и замерзает зимой

Енисей – река Сибири и замерзает зимой

Лена – река Сибири и замерзает зимой

Следовательно, все сибирские реки замерзают зимой.

Таким образом, мы взяли некоторые самостоятельные факты и выявили объединяющую их общую закономерность (что все это реки на территории Сибири) и на этом основании делаем вывод, что все сибирские реки замерзают зимой.

В данном примере это верное индуктивное рассуждение, которое привело к истинному выводу. Однако, заменив объекты другими, данное рассуждение может стать неверным.

Пример индуктивного неверного рассуждения:

Дуб – растет в России и он лиственное дерево

Береза – растет в России и она лиственное дерево

Ясень – растет в России и он лиственное дерево

Следовательно, все деревья России - лиственные

Данное рассуждение не является верным, так как есть другие деревья растущие на территории России, не являющиеся лиственными (например, Ель).

Отсюда видно, что истинность индуктивного рассуждения зависит не от того, какими связками связаны слова, а от самих слов. Следовательно, верность индуктивного рассуждения нельзя оценить на основании его формы. Необходимо оценивать смысл объектов, которые заложены в состав рассуждения.

Таким образом, при построении интеллектуальных информационных систем используются дедуктивные рассуждения, позволяющие судить об истинности суждения по его форме не вникания в смысл слов, входящих в состав высказываний.

Упражнения

1. Приведите пример индуктивного рассуждения.
2. Приведите пример дедуктивного рассуждения.

Вопросы для повторения

1. Какие рассуждения называют дедуктивными?
2. Какие рассуждения относятся к индуктивным?
3. Почему при построении механизмов логического вывода используются дедуктивные рассуждения?
4. Что ограничивает использование при построении механизмов логического вывода индуктивных рассуждений?
5. На Ваш взгляд, в каком случае можно использовать индуктивные рассуждения?
6. Позволяют ли дедуктивные рассуждения получать кардинально новые знания из имеющихся?

7.3. Основные схемы логически верных рассуждений

Схемы логически верных рассуждений позволяют получать новые знания о свойствах объектов, используемых в рассуждении. Или же при обработке логических формул сокращать их размер. Трактуются логически верные рассуждения следующим образом: если имеется знание над чертой, и оно истинно, то из него следует истинность знания под чертой.

Перечислим наиболее употребляемые *схемы логически верных рассуждений:*

1. Правило заключения (Modus Ponens) - утверждающий модус: «Если из высказывания *A* следует высказывание *B* и справедливо (истинно) высказывание *A,* то справедливо *B».*

$$\frac{A \to B, A}{B}$$

2. Правило отрицания (Modus Tollens) - отрицательный модус: «Если из *A* следует ***B*,** но высказывание *B* неверно, то неверно ***A*.**

$$\frac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}$$

3. Правила утверждения-отрицания **(**Modus Ponendo-Tollens**)**: «Если справедливо или высказывание *A,* или высказывание *B* (в разделительном смысле) и истинно одно из них, то другое ложно.

$$\frac{A \oplus B, A}{\overline{B}}; \qquad \frac{A \oplus B, B}{\overline{A}}$$

4. Правила отрицания-утверждения **(**Modus Tollen-Ponens**)**:

4.1. «Если истинно или *A,* или *B* (в разделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое».

$$\frac{A \oplus B, \overline{A}}{B}; \qquad \frac{A \oplus B, \overline{B}}{A}$$

4.2. Если истинно *A* или *B* (в неразделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое:

$$\frac{A \vee B, \overline{A}}{B}; \qquad \frac{A \vee B, \overline{B}}{A}$$

5. Правило транзитивности: «Если из *A* следует *B,* а из *B* следует *C,* то из *A* следует *C*».

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$$

6. Закон противоречия: «Если из *A* следует *B* и НЕ ***B*,** то неверно *A»:*

$$\frac{A \to B, A \to \overline{B}}{\overline{A}}$$

7. Правило контрапозиции: «Если из *A* следует *B,* то из того, что неверно *B,* следует, что неверно *A.*

$$\frac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}$$

8. Правило сложной контрапозиции: «Если из *A* и *B* следует С, то из *A* и следует *неС* следует *неВ.*

$$\frac{(A \wedge B) \rightarrow C}{(A \wedge \overline{C}) \rightarrow \overline{B}}$$

9. Правило сечения: «Если из A следует B**,** а из B и C следует D то из A и С следует D».

$$\frac{A \rightarrow B, (B \wedge C) \rightarrow D}{(A \wedge C) \rightarrow D}$$

10. Правило импортации (объединения посылок):

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{(A \wedge B) \rightarrow C}$$

11. Правило экспортации (разъединения посылок):

$$\frac{(A \wedge B) \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)}$$

12. Правила дилемм:

$$а)\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vee B}{C} \qquad б)\frac{A \rightarrow B, A \rightarrow C, \overline{B} \vee \overline{C}}{\overline{A}}$$

$$в)\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C}{B \vee D} \qquad г)\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, \overline{B} \vee \overline{D}}{\overline{A} \vee \overline{C}}$$

Примечание. Для построения логических формул, отражающих указанные выше логически правильные рассуждения, следует все посылки соединить связкой «И» (&), и полученную, таким образом обобщенную посылку связкой «если то ...» (→). Например, правило заключения должно быть представлено логической формулой:

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B} \Rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$$

<u>Схемы логически верных рассуждений позволяют получать новые знания из имеющихся</u>. Например, правило заключения. Если имеется истинное знание $A \rightarrow B$ и при это истинно А, то истинно и В. И истинность В получается именно из знания истинности двух посылок.

Пример рассуждений, не являющихся правильными:

$$а)\frac{A \rightarrow B, B}{A}; \quad б)\frac{A \rightarrow B, \overline{A}}{\overline{B}}; \quad в)\frac{A \vee B, A}{\overline{B}}$$

Для того чтобы проверить, является ли данное умозаключение логически правильным, следует восстановить схему рассуждения и определить, относится ли она к схемам логически правильных рассуждений.

Пример. К какой схеме относятся рассуждение: «Если рабочий отсутствовал на работе, он не выполнил задания. Он не выполнил задания. Следовательно, он отсутствовал на работе».

Обозначим каждое из простых высказываний: A - отсутствовал на работе; B – не выполнил задания. «Если рабочий A он B. Он B следовательно, он A». Схема данного рассуждения относится к схеме (а) неправильных рассуждений.

$$\frac{A \to B, B}{A}$$

Пример. К какой схеме относятся рассуждение: «Этот человек студент или предприниматель. Он студент. Следовательно, не предприниматель».

Обозначим каждое из простых высказываний: *A* – студент; *B* – преподаватель. Этот человек *A* или *B*. Он *A*. Следовательно, не *B*». Учитывая то, что в первом предложении союз «или» использован в неразделительном смысле. Схема $\frac{A \vee B, A}{\overline{B}}$ соответствует схеме (в) неправильных рассуждений.

Пример. К какой схеме относятся рассуждение: «Этот человек постоянно живет в Белгороде или Москве. Он живет в Белгороде. Следовательно, он не живет в Москве».

Обозначим каждое из простых высказываний: «Этот человек постоянно живет в Белгороде (*A*) или Москве (*B*). Он не живет в Белгороде (*неA*). Следовательно, он живет в Москве(*B*)». Рассуждение правильное.

$$\frac{A \oplus B, \overline{A}}{B}$$

Упражнения

1. Докажите каждое логически верное рассуждение?

2. Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически верными: Рассмотрим следующее «рассуждение»: «Если число 5 – простое, то оно нечетное. Число 5 – нечетное, следовательно, оно простое»

3. Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически верными: Если Петр занимается спортом, то Петр никогда не болеет. Петр занимается спортом, следовательно, он не болеет

Вопросы для повторения

1. В чем заключается ограниченность применения силлогизмов Аристотеля?
2. Что такое умозаключение?
3. В чем разница между посылками и заключением?
4. Охарактеризуйте основные схемы логически правильных рассуждений.
5. Как следует отображать логически правильные рассуждения для построения логических формул?

7.4. Алгебра логики

Алгебра логики как раздел математической логики изучает строение сложных логических высказываний (логических формул) и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

Объектами, изучаемые в этом разделе являются формулы алгебры логики, состоящие из букв, знаков логических операций и скобок. Буквы обозначают логические (двоичные) переменные, которые принимают только два значения – «ложь» и «истина». Знаки операций обозначают логические операции (логические связки). Каждая формула задает логическую функцию, которая сама может принимать только два логических значения.

Пусть $B = \{0, 1\}$ - бинарное множество, элементами которого являются формальные символы 1 и 0, интерпретируемые как {истинно, ложно}.

Алгебра логики - алгебра, образованная множеством $B = \{0, 1\}$ вместе со всеми возможными операциями на нем.

Функция алгебры логики f от n переменных $f(x1, x2, ..., x_n)$ называется n-арная логическая операция на B, $f{:}Bn \rightarrow B$.

Любую логическую функцию $f(x1, x2, ..., x_n)$ можно задать таблицей истинности, в левой части которой выписаны все возможные наборы значений ее аргументов $(x1, x2, ..., x_n)$, а правая часть представляет собой столбец значений функций, соответствующих этим наборам.

Число всех возможных различающихся наборов значений n переменных логической функции $f(x1, x2, ..., x_n)$ равно 2^n.

Множество всех логических функций одной переменной (унарные операции) представлено в табл. 7.1. Так как для унарной операции функция применяется к одной переменной, находящейся в состоянии либо 0 либо 1, то число всех возможных наборов значений 2^1 равно 2, а следовательно число функций равно 4.

Таблица 7.1. Логические функции одной переменной

x	***$f_0(x)$***	***$f_1(x)$***	***$f_2(x)$***	***$f_3(x)$***
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
Результат функции	0	x	$\bar{x}$	1
Название функции	*Константа 0*	*Повторение переменной*	*Отрицание переменной*	*Константа 1*

В случае бинарных операций число всех возможных различающихся функций равно 16. Множество всех логических функций двух переменных (бинарных логических операций) - представлено в табл. 7.2.

Таблица 7.2. Логические функции двух переменных

$x_1 x_2$	***f_0***	***f_1***	***f_2***	***f_3***	***f_4***	***f_5***	***f_6***	***f_7***	***f_8***	***f_9***	***f_{10}***	***f_{11}***	***f_{12}***	***f_{13}***	***f_{14}***	***f_{15}***
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	&		x_1		x_2	$\oplus$	v	$\downarrow$	$\approx$	$\overline{x_2}$	$\leftarrow$	$\overline{x_1}$	$\rightarrow$	$\mid$	1

Назовем функции из табл. 7.2.

$f_0(x_1\ x_2)$ – константа 0;
$f_1(x_1\ x_2)$ – конъюнкция;
$f_3(x_1\ x_2)$ – переменная x_1;
$f_5(x_1\ x_2)$ – переменная x_2;
$f_6(x_1\ x_2)$ – сложение по модулю 2;
$f_7(x_1\ x_2)$ – дизъюнкция;
$f_8(x_1\ x_2)$ – стрелка Пирса;
$f_9(x_1\ x_2)$ – эквивалентность;
$f_{10}(x_1\ x_2)$ – отрицание x_2;
$f_{12}(x_1\ x_2)$ – отрицание x_1;
$f_{13}(x_1\ x_2)$ – импликация;
$f_{14}(x_1\ x_2)$ – штрих Шеффера;
$f_{15}(x_1\ x_2)$ – константа 1.

Формулы называются ***эквивалентными*** (равносильными) если они представляют собой одну и ту же функцию.

Метод установления эквивалентности двух формул:

1. по каждой формуле восстанавливается таблица истинности;
2. полученные таблицы сравниваются по каждому набору значений переменных.

Пример. Составить таблицу истинности функции трех переменных, заданной формулой:

$f(x_1 x_2 x_3)$ [illegible]

Упражнения

1. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний.

а) Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

б) Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут, и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

в) Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или я пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

2. Самодержавный правитель одного острова хотел воспрепятствовать тому, чтобы на острове поселились пришельцы. Желая соблюсти видимость справедливости, он издал распоряжение, согласно которому всякий, желающий поселиться на острове, должен, хорошо поразмыслив, высказать любое предложение, причем после предварительного предупреждения, что от содержания этого предложения зависит его жизнь. Распоряжение гласило: «Если пришелец скажет правду, его расстреляют. Если он скажет неправду, его повесят». Может ли пришелец, став жителем острова, сохранить свою жизнь?

3. Турист шел к озеру. Он шел до перекрестка, откуда вела одна дорога вправо, а другая – влево; одна шла к озеру, другая – нет. На перекрестке сидело двое парней, один из них всегда говорил правду, второй всегда лгал. Оба они отвечали на любой вопрос либо «да», либо «нет». Все это было туристу известно, но он не знал, кто из них говорит правду, кто лжет; он также не знал, какая из дорог ведет к озеру.

а) Турист поставил обоим сразу один вопрос, каждый из них дал на него свой ответ. Спрашивается, какой это был вопрос, раз турист по полученным ответам безошибочно решил, какая из дорог ведет к озеру?

б) Турист поставил одному из парней два вопроса. Какие это были вопросы, раз он по ответам на них узнал, какая дорога ведет к озеру?

в) Турист поставил лишь один вопрос одному из парней. Какой это был вопрос, раз он узнал по ответу, какая дорога ведет к озеру?

Вопросы для повторения

1. Что изучает алгебра логики?
2. Приведите пример бинарных операций алгебры логики?
3. Что называют функцией алгебры логики?
4. Каким образом можно задать логические функции?
5. Можно ли заменить одни логические операции другими?
6. Какие формулы называют эквивалентными?
7. Опишите метод установления эквивалентности двух формул.

Глава 8. Булева алгебра

8.1. Основы булевой алгебры

Существуют такие наборы логических функций (операций), с помощью которых можно выразить любые другие логические функции.

Булева формула – это формула, которая содержит кроме переменных и скобок только знаки функций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Теорема 1. Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т.е. как суперпозиция дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Следовательно, система булевых функций (операций) {&, v, -} функционально полна. Это означает, что переход от табличного задания любой логической функции к формуле булевой алгебры, или булевой формуле, всегда возможен.

Переход от табличного задания логической функции к булевой формуле осуществляется в 3 этапа:

1. для каждого набора значений переменных *x1, x2, ...,* x_n на котором функция *f(x1, x2, ...,* x_n*)* равна 1, выписываются конъюнкции всех переменных;
2. над теми переменными, которые на этом наборе равны 0, ставятся отрицания;
3. все такие конъюнкции соединяются знаками дизъюнкции.

Полученная таким образом формула называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (СДНФ) логической функции *f(x1, x2, ...,* x_n*)*.

Для каждой функции СДНФ единственна (с точностью до перестановок переменных или конъюнкций).

Пример. Логическую функцию трех переменных $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\approx\overline{x_2})\to(x_1\vee x_3)\wedge x_2$ представить булевой формулой.

Для того чтобы воспользоваться описанной выше процедурой построения СДНФ логической функции, заданной не булевой формулой, восстановим по исходной формуле ее таблицу истинности (табл. 8.1).

Таблица 8.1. Таблица истинности логической функции трех переменных

x_1,x_2,x_3	$\overline{x_2}$	$x_1\approx\overline{x_2}$	$x_1\vee x_3$	$(x_1\vee x_3)\wedge x_2$	$(x_1\approx\overline{x_2})\to(x_1\vee x_3)\wedge x_2$
000	1	0	0	0	1
001	1	0	1	0	1
010	0	1	0	0	0
011	0	1	1	1	1
100	1	1	1	0	0
101	1	1	1	0	0
110	0	0	1	1	1

111	0	0	1	1	1

Далее ищем СДНФ логической функции [illegible], выполняя последовательно все 3 этапа:

1. [illegible]
2. [illegible]

После выполнения третьего шага логическая функция будет выглядеть в виде булевой формулы следующего вида:

[illegible]

Упражнения

1. Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицей истинности. Записать функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде СДНФ.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	1	1	1
1	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	0
1	1	1	1
0	0	1	0
1	1	1	1
0	1	0	1

2. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (\overline{x_2} \to (x_3 \to (x_3 \approx x_1)$. Представить ее в виде СДНФ.

Вопросы для повторения

1. Какие существуют функционально полные системы?
2. Что называют базисом?
3. В чем особенность булевой формулы?
4. Какие существуют этапы перехода от табличного задания логической функции к булевой формуле?
5. Что такое СДНФ?

8.2. Эквивалентные преобразования

Эквивалентные преобразования - преобразования, использующие эквивалентные соотношения и правила замены.

Два правила замены:

1. Правило подстановки формулы f вместо переменной x. При подстановке формулы f вместо переменной x все вхождения переменной x в исходное соотношение должны быть одновременно заменены формулой f.

2. Правило замены подформул. Если какая-либо формула *f*, описывающая функцию φ, содержит f_1 в качестве подформулы, то замена f_1 на эквивалентную f_2 ($f1 = f_2$) не изменит функции φ.

Основные эквивалентные соотношения (законы) в булевой алгебре.

Коммутативность конъюнкции и дизъюнкции:

$$\begin{aligned} &а) x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1 \\ &б) x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции:

$$\begin{aligned} &а) x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \\ &б) x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_3 \qquad (3)$$

Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \qquad (4)$$

Идемпотентность:

$$\begin{aligned} &а) x \wedge x = x \\ &б) x \vee x = x \end{aligned} \qquad (5)$$

Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} = x \qquad (6)$$

Свойства констант 0 и 1:

$$\begin{aligned} &а) x \wedge 1 = x \quad в) x \vee 1 = 1 \\ &б) x \wedge 0 = 0 \quad г) x \vee 0 = x \end{aligned} \qquad (7)$$

Правила де Моргана:

$$\begin{aligned} &а) \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \\ &б) \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \end{aligned} \qquad (8)$$

Закон противоречия:

$$x \wedge \overline{x} = 0 \qquad (9)$$

Закон исключенного третьего:

$$x \vee \overline{x} = 1 \qquad (10)$$

Основные эквивалентные соотношения (1) – (10) отличаются тем, что они не выводимы друг из друга и этих соотношений достаточно для выполнения любых эквивалентных преобразований. Проверить эквивалентность соотношений можно построив таблицу истинности и сравнив результат левой и правой частей выражения.

Для упрощения формул так же используются следующие эквивалентные соотношения, выводимые из основных с помощью эквивалентных преобразований:

Поглощение:

$$\begin{aligned}
&а) x \vee x \wedge y = x \wedge 1 \vee x \wedge y = x \wedge (1 \vee y) = x \\
&а) x \vee \bar{x} \wedge y = (x \vee \bar{x}) \wedge (x + y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y \\
&б) x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \\
&б) x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge \bar{x} \vee x \wedge y = 0 \vee x \wedge y = x \wedge y
\end{aligned} \qquad (11)$$

Склеивание:

$$\begin{aligned}
&x \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = x \wedge (y \vee \bar{y}) = x \\
&(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x \vee (y \wedge \bar{y}) = x
\end{aligned} \qquad (12)$$

Обобщенное склеивание:

$$xy \vee \bar{x}z \vee yz = xy \vee \bar{x}z \qquad (13)$$

$$x \vee \bar{x} \wedge y = x \vee y \qquad (14)$$

Из определения булевой алгебры следует, что любую бинарную логическую операцию можно выразить через комбинацию операций конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Например:

$$x \to y = \bar{x} \vee y \qquad (15)$$

$$x \oplus y = (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{y} \wedge x) \qquad (16)$$

$$\begin{aligned}
&x \approx y = (x \to y) \wedge (y \to x) \\
&x \approx y = \overline{(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})}
\end{aligned} \qquad (17)$$

$$x \uparrow y = \overline{x \vee y} \qquad (18)$$

$$x \mid y = \overline{x \wedge y} \qquad (19)$$

Упражнения

1. Выведите эквивалентные преобразования с 1 по 19.

Вопросы для повторения

1. Каким образом можно доказать эквивалентность формул?
2. Что называют эквивалентными преобразования?
3. Какие существуют правила замены?
4. Какие существуют эквивалентные соотношения в булевой алгебре?

8.3. Приведение к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной формам

В процессе приведения логической формулы к КНФ либо ДНФ необходимо в первую очередь посредством эквивалентных преобразований (15-19) избавиться от всех логических операций, не входящих в булеву алгебру.

Элементарная дизъюнкция - дизъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) - формула, имеющая вид дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Приведение формулы к ДНФ осуществляется в 4 этапа:

1. все отрицания «спустить» до переменных с помощью (6) и (8);
2. раскрыть скобки с помощью (2), (3), (4);
3. удалить лишние конъюнкции и повторения переменных в конъюнкциях с помощью (5), (9), (10);
4. удалить константы с помощью (7).

Элементарная конъюнкция - конъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) - конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Пример КНФ:

$$X$$

$$\overline{X}$$

$$X \vee \overline{Y}$$

$$X \vee \overline{Y} \vee Z$$

$$(X \vee Y) \wedge Z$$

$$(X \vee Y) \wedge (Z \vee \overline{D})$$

Пусть ДНФ F имеет вид $F = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_m$, где $k_1, k_2, ..., k_m$ - элементарные конъюнкции.

Приведение ДНФ к КНФ состоит из трех шагов:

1. Применить к F правило двойного отрицания $F = \overline{\overline{k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_m}}$.
2. Привести $\overline{k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_m}$ к ДНФ $k_1' \vee k_2' \vee ... \vee k_m'$, где $k_1' \vee k_2' \vee ... \vee k_m'$ - элементарные конъюнкции. Тогда

$$F = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_m = \overline{\overline{k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_m}} = \overline{k_1' \vee k_2' \vee ... \vee k_m'}$$

3. С помощью правил де Моргана освободиться от второго отрицания и преобразовать отрицания элементарных конъюнкций в элементарные дизъюнкции $D_1, D_2, ..., D_m$. Тогда

$$F=\overline{k_1' \vee k_2' \vee \ldots \vee k_m'}=\overline{k_1'} \cdot \overline{k_2'} \cdot \ldots \cdot \overline{k_m'}=D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots D_m.$$

Совершенная КНФ (СКНФ) - КНФ, каждая элементарная дизъюнкция которой содержит все переменные.

Пример. Привести формулу $f(a,b,c)=(a \wedge b) \vee (\bar{c} \wedge d)$ к КНФ.

1. Применяем к формуле правило двойного отрицания $\overline{\overline{(a \wedge b) \vee (\bar{c} \wedge d)}}$
2. Опускаем первое отрицание при помощи правил де Моргана (8) $\overline{\overline{(a \wedge b)} \wedge \overline{(\bar{c} \wedge d)}}$
3. При помощи (8) избавляемся от отрицаний над скобками $\overline{(\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{d})}$
4. Раскрываем скобки $\overline{\bar{a} \wedge c \vee \bar{b} \wedge c \vee \bar{a} \wedge \bar{d} \vee \bar{b} \wedge \bar{d}}$
5. Опускаем отрицание $\overline{\bar{a} \wedge c} \wedge \overline{\bar{b} \wedge c} \wedge \overline{\bar{a} \wedge \bar{d}} \wedge \overline{\bar{b} \wedge \bar{d}}$
6. И получаем КНФ, опустив еще раз отрицания $(\bar{a} \vee c) \wedge (\bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{d}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{d})$

Пример. Привести формулу $f(x,y,z)=\bar{x} \to \overline{y \to z}$ к КНФ.

1. Заменяем импликацию через дизъюнкцию согласно (15) $x \vee \overline{\bar{y} \vee z}$
2. Применяем законы Де Моргана (8) $x \vee (y \wedge \bar{z})$
3. Применяем (4) и получаем КНФ $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{z})$

С точки зрения построения интеллектуальных информационных систем применяемой на практике является КНФ. Удобным в использовании является тот факт, что доказательство хотя бы одной ложной дизъюнкции приводит к ложности все суждение.

Упражнения

1. Используя эквивалентные преобразования, построить КНФ функции $f(x_1,x_2,x_3)$:

1) $f(\tilde{x}^2)=((x_1 \to x_2) \oplus (\overline{x_1} \mid x_2)) \cdot (x_1 \sim x_2 \cdot (x_1 \to x_2));$

2) $f(\tilde{x}^2)=\overline{x_1 x_2} \vee (x_1 \downarrow (x_2 \vee (\overline{x_1} \to x_2)));$

3) $f(\tilde{x}^3)=x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_2}x_3 \vee (x_1 \to x_2x_3);$

2. Используя дистрибутивный закон $x(y \vee z)=xy \vee xz$ и эквивалентности $x \cdot x = x$, $x \cdot \bar{x}=0$, $A \cdot 0 = 0$, $A \vee 0 = A$, и $A \vee A \cdot B = A$, перейти от заданной КНФ функции $f(\tilde{x}^n)$ к ДНФ:

1) $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$

2) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3)$;

2. Для функции $f(x, y, z) = (x \sim z) \mid ((x\, y) \sim (y\, z))$:

а) составить таблицу истинности;

б) написать для неё СДНФ или СКНФ (если это возможно)

Вопросы для повторения

1. Что называют элементарной дизъюнкцией?
2. Что называется элементарной конъюнкцией?
3. Как строится ДНФ?
4. Как строится КНФ?
5. Что называют совершенной КНФ?

Глава 9. Вывод в логике высказываний

9.1. Правило резолюций

Одна из основных целей изучения логики состоит в получении формального аппарата для доказательства того, является ли данное утверждение следствием других.

Введем следующие определения.

Литера – либо буква, либо ее отрицание ($x, \bar{x}, y, z, \bar{z}...$).

Дизъюнкт – дизъюнкция литер ($x, x \vee \bar{z}, y \vee x$).

Единичный дизъюнкт - одна литера x.

Контрарная пара – литера и ее отрицание ($x, \bar{x}$).

Пустой дизъюнкт – $\square$ (в данном пособии пустой дизъюнкт будет обозначаться #). Содержательно пустой дизъюнкт всегда ложен, так как в нем нет литер, которые могли бы быть истинными при любых наборах переменных.

Правило резолюций. Из дизъюнктов $(X \vee F)$ и $(\bar{X} \vee G)$ выводим дизъюнкт $(F \vee G)$. Или другими словами, дизъюнкт $(F \vee G)$ является логическим следствием дизъюнктов $(X \vee F)$ и $(\bar{X} \vee G)$. Если $(X \vee F)$=1 и $(\bar{X} \vee G)$=1, то $(F \vee G)$=1.

$$\frac{(X \vee F) \wedge (\bar{X} \vee G)}{F \vee G}$$

Доказательство правила резолюций. Пусть $(X \vee F)$=1 и $(\bar{X} \vee G)$=1. Тогда, если (F)=1, то и $(F \vee G)$ = 1. Если же (F)=0, то (X) должно быть равно 1, поскольку $(X \vee F)$=1. Но тогда $(\bar{X})$=0. Следовательно, (G)=1, так как $(\bar{X} \vee G)$=1. Но если (G)=1, то и $(F \vee G)$ = 1.

Доказательство логическим преобразованием, **проверяющим верность (тождественную истинность) данного правила (формулы)** $(X \vee F) \wedge (\bar{X} \vee G) \to (F \vee G)$:

1. Заменим импликацию

$$(X \vee F) \wedge (\bar{X} \vee G) \to (F \vee G) = \overline{(X \vee F) \wedge (\bar{X} \vee G)} \vee (F \vee G) =$$

2. Заменим отрицание по правилу де Моргана

$$= \overline{(X \vee F)} \vee \overline{(\bar{X} \vee G)} \vee (F \vee G) =$$

3. Заменим отрицание по правилу де Моргана

$$= \bar{X} \wedge \bar{F} \vee X \wedge \bar{G} \vee F \vee G \equiv 1$$

Таким образом, мы доказали, что данная формула действительно верна.

Пример работы правила резолюций. Допустим, имеется следующая КНФ: $(A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (D \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{D})$.

Проведем назначение кандидатов на **X, F** и **G**. Выполнить такое действие нам позволяет тот факт, что каждый дизъюнкт правила резолюций может состоять как из литер, так и из формул. Тогда делая замены, согласно правила резолюций, мы можем получить новые дизъюнкты (при этом необходимо, чтобы из пары дизъюнктов можно было получить контрарную пару!!!).

1) Возьмем первые 2 дизъюнкта $(A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (D \vee B)$ и сопоставим их к виду дизъюнктов правила резолюций $(X \vee F) \wedge (\overline{X} \vee G)$:

$$X = B$$
$$G = A \vee C$$
$$F = D$$

Тогда, на основании правила резолюций следует, что $F \vee G = D \vee A \vee C$.

2) Возьмем первый и третий дизъюнкты $(A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (\overline{A} \vee \overline{D})$ и сопоставим их к виду дизъюнктов правила резолюций $(X \vee F) \wedge (\overline{X} \vee G)$:

$$X = A$$
$$F = \overline{B} \vee C$$
$$G = \overline{D}$$

Тогда, на основании правила резолюций следует, что $F \vee G = \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$.

3) Возьмем второй и третий дизъюнкты $(D \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{D})$ и сопоставим их к виду дизъюнктов правила резолюций $(X \vee F) \wedge (\overline{X} \vee G)$:

$$X = D$$
$$F = B$$
$$G = \overline{A}$$

Тогда, на основании правила резолюций следует, что $F \vee G = B \vee \overline{A}$.

Пример работы правила резолюций, когда формула содержит пустой дизъюнкт. Допустим, имеется следующая КНФ: $(\overline{A} \vee B \vee C) \wedge (A) \wedge (\overline{A})$.

Проведем назначение кандидатов на **X, F** и **G**.

1) Возьмем первые 2 дизъюнкта $(\overline{A} \vee B \vee C) \wedge (A)$ и сопоставим их к виду дизъюнктов правила резолюций $(X \vee F) \wedge (\overline{X} \vee G)$:

$$X = A$$
$$F = \#$$
$$G = B \vee C$$

Тогда, на основании правила резолюций следует, что $F \vee G = \# \vee B \vee C = B \vee C$.

2) Возьмем второй и третий дизъюнкты $(A) \wedge (\overline{A})$. В данном примере в качестве дизъюнктов выступают $\overline{A}$ и A, то есть доказан факт и не факт, то есть противоречие. Это говорит о том, что что то в расчетах пошло фундаментальным образом не так и необходимо начать вывод сначала. Применим правило резолюций и сопоставим их к виду дизъюнктов $(X \vee F) \wedge (\overline{X} \vee G)$.

$$X = A$$
$$F = \#$$
$$G = \#$$

Тогда, на основании правила резолюций следует, что $F \vee G = \#$.

Таким образом, **если удалось при помощи правила резолюций откуда то вывести противоречие, то мы доказали противоречивость всей формулы. Это очень важный факт, который используется в методе резолюций.**

Упражнения

1. Найти все возможные резольвенты (если они есть) следующих пар дизъюнктов:

а) $D_1 = X \vee Y, D_2 = \overline{X} \to Y;$

б) $D_1 = X \vee Y \vee \overline{Z}, D_2 = \overline{Z} \to X;$

в) $D_1 = X \wedge Y, D_2 = \overline{X} \vee Y;$

г) $D_1 = X \to (\overline{Y} \vee Z), D_2 = \overline{\overline{Y} \vee Z}.$

Вопросы для повторения

1. В чем заключается особенность контрарной пары?
2. Как работает правило резолюций?
3. Зачем вводится понятие пустого дизъюнкта?
4. Почему правило резолюций работает с КНФ?
5. В каком случае правило резолюций не применимо?

9.2. Метод резолюций

Метод резолюций это алгоритм, позволяющий на основании правила резолюций доказывать формулы логики высказываний. Применяется в том случае, когда необходимо выяснить является ли данная формула Ф тождественно истинной, что означает ее логическое следствие $A_1, A_2, ..., A_n$.

Для выяснения тождественной истинности или тождественной ложности любой формулы существует 2 основных подхода:

1. Вычислять на всех наборах, что не эффективно в случае большого количества переменных, так как количество вычислений растет в арифметической прогрессии (например, для n переменных число вычислений 2^n, при этом вычисления могут быть не только простыми).

2. Преобразовывать формулу, до тех пор, пока не получится либо тождественная единица, либо тождественный ноль, либо формула, не сводимая ни туда, ни сюда. Простое преобразование (раскрытие скобок, приведение подобных членов и так далее) не является эффективным, так как является трудоемким процессом.

КНФ – конъюнктивная нормальная форма, представляющая собой конъюнкцию дизъюнкций. <u>С целью упрощения, КНФ в методе резолюций будет представляться списком дизъюнктов S.</u>

Основная идея метода. Необходимо выяснить является ли данная формула Φ тождественно истинной? Вместо этого решается противоположная задача. Выясняется тождественная ложность отрицания формулы $\overline{\Phi}$. Обосновывается это тем, что мы работаем с КНФ. Следовательно, если хотя бы одна конъюнкция становится равной нулю, то и вся формула в виде КНФ становится равной нулю.

Таким образом, производится поиск конъюнкций равных нулю. Это осуществляется постепенным путем некоторого основного преобразования (правило резолюций) убирающим некоторые буквы из конъюнкции с целью получения двух единичных дизъюнктов, например, $x\,и\,\bar{x}$, являющихся контрарной парой. Следовательно, если мы получили два дизъюнкта, представляющих собой контрарную пару (это означает что один дизъюнкт ложь, а другой истина), то вся конъюнкция равняется нулю.

Метод резолюций предлагает более целенаправленное преобразование, позволяющее выяснить тождественную истинность или тождественную ложность формул.

Рассмотрим работу метода резолюций. Допустим, имеется 2 дизъюнкта:

$$C_1 = a \vee F$$
$$C_2 = \bar{a} \vee G$$

Где $a, \bar{a}$ - литера;

F, G - некие формулы, представляющие собой некие дизъюнкции.

Тогда, дизъюнкт $D = F \vee G$ называется **резольвентой** дизъюнктов $C_1\,и\,C_2$ по литере a.

Если дизъюнкты $C_1\,и\,C_2$ не содержат контрарных литер, то резольвенты у них не существует!

Резолютивный вывод – поиск резольвент, представляющий собой в результате последовательность дизъюнктов, принадлежащих к исходному множеству дизъюнктов плюс резольвенты предшествующих дизъюнктов.

Допустим, была некая формула в КНФ:

$$..........\wedge (a \vee F) \wedge ....\wedge (\bar{a} \vee G) \wedge ....$$

Заменяем согласно правила резолюций две скобки (дизъюнкты) на $(F \vee G)$, что приводит к упрощению формулы:

$$..........\wedge (a \vee F) \wedge ....\wedge (\bar{a} \vee G) \wedge ....$$
$$......................\wedge (F \vee G) \wedge ....$$

Допустим, что мы свели первый дизъюнкт к a, а второй дизъюнкт к $\bar{a}$, то есть получили контрарную пару, что говорит о том, что КНФ равна нулю.

Это же можно доказать применив правило резолюций, добавив к дизъюнктам a и $\bar{a}$ пустой дизъюнкт

$a \vee (\# = F)$

$\bar{a} \vee (\# = G)$

Применив правило резолюции, получится пустой дизъюнкт #.

Особенно удобен метод резолюций, когда логическая проблема представлена в следующем виде:

Доказать, что из посылок (формул) $A_1, A_2, ..., A_n$, следует некоторое следствие В» $\dfrac{A_1, A_2, ..., A_n}{B}$. Данная задача эквивалентна следующей записи $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B$.

Таким образом, задача сводится к выяснению, является ли данная формула $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B$ тождественно истинной. Как говорилось, метод резолюций вместо выяснения тождественной истинности формулы

$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B$, выясняет тождественную ложность отрицания данной формулы $\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B}$.

1. Заменим импликацию $\overline{\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n} \vee B} =$

2. Заменим отрицание по правилу де Моргана $= A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \overline{B}$

Данная формула $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \overline{B}$ представляет собой конъюнкцию, и к КНФ нужно приводить только отдельные формулы $A_1, A_2, ..., A_n, \overline{B}$. Таким образом, необходимо доказать тождественную ложность данной формулы (противоречие) $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \overline{B} \to \#$. Ложь может следовать только из-за лжи, а из истины ложь следовать не может (свойство импликации). Поэтому вывод пустой дизъюнкции из формул $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \overline{B}$ покажет, что они не совместимы друг с другом (то есть не могут быть верны все эти формулы одновременно). Но нам известно, что $A_1, A_2, ..., A_n$ истины, то есть у нас имеется такое знание. И дополнительно мы доказали, что одновременно $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \overline{B}$ не может быть истиной, следовательно, невозможно чтобы было $\overline{B}$. $\overline{B}$ не может быть истинно, а следовательно истинно B.

Алгоритм построения вывода методом резолюций $\dfrac{A_1, A_2, ..., A_n}{B}$:

1. Привести формулу к виду $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B$.

2. Применить правило отрицания к исходной формуле $\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B}$.

3. Преобразовать формулу к виду $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \overline{B}$.

4. Доказываем тождественную ложность данной формулы (противоречие) $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \wedge \overline{B} \to \#$.

5. Привести все формулы $A_1, A_2, ..., A_n, \overline{B}$ к КНФ.

6. Составить множество дизъюнктов S формул $A_1, A_2, ..., A_n, \overline{B}$.

7. Посредством применения правила резолюций к дизъюнктам, содержащим контрарные пары, ищем их резольвенты.

8. Процесс продолжается до тех пор, пока не получится пустой дизъюнкт #, либо не выведется два дизъюнкта представляющих собой контрарную пару литер (что тоже является #).

9. Если процесс заканчивается пустым дизъюнктом, то вывод обоснован.

Таким образом, если пустой дизъюнкт выводим из множества дизъюнктов S, то формула B является логическим следствием формул $A_1, A_2, ..., A_n$. Если из множества дизъюнктов нельзя вывести #, то B не является логическим следствием формул $A_1, A_2, ..., A_n$.

В процессе осуществления резолютивного вывода возможны следующие ситуации:

1. Среди множества дизъюнктов нет содержащих контрарные литеры. Это означает, что формула B не выводима из множества формул $A_1, A_2, ..., A_n$.

2. В результате очередного применения правила резолюции получен пустой дизъюнкт. Это означает, что формула B выводима из множества формул $A_1, A_2, ..., A_n$.

3. Процесс зацикливается, т. е. получаются все новые и новые резольвенты, среди которых нет пустых. Это ничего не означает.

При построении интеллектуальных систем основанных на методе резолюций решается алгоритмическая задача «Каким образом формировать резольвенты для быстрого получения контрарной пары и до каких пор формировать резольвенты?».

Преимущества и недостатки метода резолюций

1. Метод резолюций легко поддается алгоритмизации. Это позволяет использовать его в логических языках.

2. Недостатком этого метода является необходимость представления формул в КНФ.

3. Автоматическое доказательство теорем методом резолюций основано на переборе, который может быть настолько большим, что затраты времени на него практически неосуществимы.

4. В множестве дизъюнктов существует, как правило, не одна пара дизъюнктов, к которым можно применить правило резолюций.

5. Применение метода резолюций в доказательстве теорем и при планировании действий.

Пример. Доказать методом резолюций $\frac{A \oplus B, A \to B}{\overline{A}}$ (истинность $\overline{A}$ если известно, что истинны посылки $A \oplus B, A \to B$), что эквивалентно записи $((A \oplus B) \wedge (A \to B)) \to \overline{A}$.

Доказательство методом резолюций основывается на доказательстве несовместимости отрицания исходной формулы.

1. Следовательно, применяется отрицание к исходной формуле $\overline{((A \oplus B) \wedge (A \to B)) \to \overline{A}}$, что после преобразования эквивалентно записи $(A \oplus B) \wedge (A \to B) \wedge A$.

2. Приводим формулы к КНФ: $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge A$

3. Опускается знак конъюнкции, и выписываются только дизъюнкты $(A \vee B), (\overline{A} \vee \overline{B}), (\overline{A} \vee B), A$

4. К дизъюнктам применяется правило резолюций:

4.1. Возьмем первые 2 дизъюнкта $(A \vee B), (\overline{A} \vee \overline{B})$ и сопоставим их к виду дизъюнктов правила резолюций $(X \vee F) \wedge (\overline{X} \vee G)$:

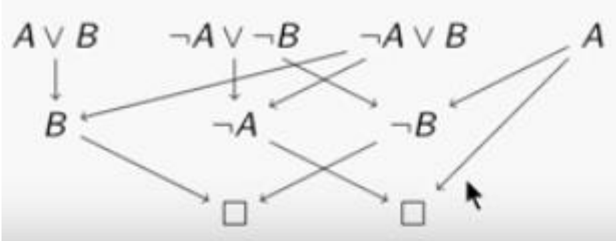
$X = A$

$F = B$

$G = \overline{B}$

Тогда, на основании правила резолюций следует, что $F \vee G = B \vee \overline{B} \equiv 1$. Видно, что получается тождественная единица, но она нам не сообщает дополнительной информации, так как она может следовать и изо лжи.

4.2. Применим правило резолюций к другим парам дизъюнктов и получим следующее множество дизъюнктов:



Получив пустую дизъюнкцию, мы доказали, что формулы $\overline{(A\oplus B)\wedge(A\to B)\to\overline{A}}$ противоречивы. Таким образом, из $(A\oplus B)\wedge(A\to B)\to\overline{A}$ следует истинность $\overline{A}$.

Видно, что получены пустые дизъюнкты. При этом они получены из различных комбинаций литер. Метод резолюций не дает полного алгоритма, каким образом выбирать пары дизъюнктов или как ускорить процесс получения пустого дизъюнкта. С целью оптимальной программной реализации метода разработаны различные стратегии перебора дизъюнктов.

Упражнения

1. Доказать методом резолюций, что из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ следует B:

а) $A_1 = X \vee Y,\ A_2 = X \to Z,\ B = (Y \to Z) \to Z;$

б) $A_1 = X,\ A_2 = X \wedge Y \to Z,\ B = Y \to Z;$

в) $A_1 = X \to Y \vee Z,\ A_2 = Z \to W,\ A_3 = \overline{W},\ B = X \to Y;$

г) $A_1 = X \vee Y \vee \overline{Z},\ A_2 = X \to X1,\ A_3 = Y \to Y1,\ A_4 = Z,\ B = X1 \vee Y1;$

д) $A_1 = X \wedge Y \to \overline{X} \wedge Z,\ A_2 = \overline{(X \wedge \overline{Y})} \vee Z,\ B = X \to Z;$

е) $A_1 = X \to (\overline{Y} \wedge (\overline{Y} \to Z)),\ A_2 = (X \to \overline{Y}) \wedge \overline{(\overline{Y} \wedge \overline{W})},\ B = W \vee Z.$

2. Записать формально следующее рассуждение на языке логики высказываний и доказать его справедливость, используя метод резолюций.

а) Посылки: Если идет дождь, то не жарко. Если светит солнце, то жарко. Идет дождь.

Заключение: Не жарко и не светит солнце.

б) Посылки: Экзамен сдан вовремя или сессия продлена. Если сессия продлена, то не сдана курсовая работа или не зачтены лабораторные работы. Курсовая работа сдана. Экзамен вовремя не сдан.

Заключение: Неверно, что если курсовая работа сдана, то лабораторные работы зачтены.

в) Посылки: Если имеет место денежная эмиссия, то растет курс доллара. Если эмиссии нет и инфляция не растет, то курс доллара не растет. Инфляция не растет.

Заключение: Имеет место эмиссия и растет курс доллара или нет эмиссии и курс доллара не растет.

г) Посылки: Заработная плата возрастет только, если будет инфляция. Если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни. Заработная плата возрастет.

Заключение: Стоимость жизни увеличится.

д) Посылки: Если 2 - простое число, то это наименьшее простое число. Если 2 - наименьшее простое число, то 1 не есть простое число. Число 1 не есть простое число.

Заключение: 2 - простое число.

е) Посылки: Джон или переутомился, или он болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается.

Заключение: Джон болен.

ж) Посылки: Если завтра будет холодно, я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен.

Заключение: Я не надену теплое пальто.

з) Посылки: Если исход скачек будет предрешен сговором или в игорных домах будут орудовать шулеры, то доходы от туризма упадут и город пострадает. Если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна. Полиция никогда не бывает довольна.

Заключение: Исход скачек не предрешен сговором.

и) Или Сэлли и Боб одного возраста, или Сэлли старше Боба. Если Сэлли и Боб одного возраста, то Нэнси и Боб не одного возраста. Если Сэлли старше Боба, то Боб старше Уолтера.

Заключение: Или Нэнси и Боб не одного возраста, или Боб старше Уолтера.

3. Запишите следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний. Если рассуждение логично, то докажите это методом резолюций; если нелогично, то постройте интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

а) Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме случая, когда она длится более месяца и президент фирмы уйдет в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать и забастовка заканчивается. Следовательно, забастовка длилась более месяца.

б) Если подозреваемый совершил эту кражу, то она была тщательно подготовлена или он имел соучастника. Если бы кража была тщательно подготовлена, то если бы он имел соучастника, был бы украден дорогой компьютер. Компьютер остался на месте. Следовательно, подозреваемый невиновен.

4. Будут ли логичны следующие рассуждения? Если логичны, то доказать это методом резолюций. Если нет, то построить интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

а) Если кто-нибудь может решить эту задачу, то и любой математик может ее решить. Олег – математик, но не может решить эту задачу. Следовательно, задачу не сможет решить никто.

б) Всякий, кто может решить эту задачу – математик. Олег – математик, но не может решить эту задачу. Следовательно, задачу не может решить никто.

в) Если кто-нибудь может решить эту задачу, то и какой-нибудь математик может ее решить. Олег – математик, но не может решить задачу. Следовательно, задачу не может решить никто.

г) Некоторые из первокурсников знакомы со всеми спортсменами института. Ни один первокурсник не знаком ни с одним любителем подледного лова. Следовательно, ни один спортсмен не является любителем подледного лова.

д) Каждый из первокурсников знаком с кем-либо из спортсменов. Некоторые из первокурсников не знакомы ни с одним любителем подледного лова. Следовательно, ни один спортсмен не является любителем подледного лова.

5. Будут ли логичны следующие рассуждения?

а) Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит был убийцей.

б) В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

в) Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся.

г) Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест, и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.

Вопросы для повторения

1. Что называют резольвентой?
2. В каком случае, возможно получение резольвенты?
3. Опишите принцип работы метода резолюций?
4. Где может быть применен метод резолюций?
5. Какими недостатками обладает метод резолюций?
6. Что такое резолютивный вывод?

9.3. Стратегии формирования резольвент для метода резолюций

Во множестве дизъюнктов S существует, как правило, не одна пара дизъюнктов, к которым можно применить правило резолюций.

Стратегия метода резолюций - способ выбора дизъюнктов и литералов в них, к которым применяется правило резолюций для получения резольвент.

Метод резолюций не является алгоритмом в плане его практической реализации. Он описывает последовательность действий, которые необходимо выполнять для достижения цели. Но он не отвечает на вопросы: «Каким оптимальным образом выбирать дизъюнкты из множества S для получения резольвент, приводящих к #?» или «Что делать при зацикливании процесса получения резольвент?». Рассмотрим некоторые стратегии, которые решают данные вопросы.

Стратегия насыщения уровней.

Сущность стратегии насыщения уровней заключается в полном переборе возможных вариантов дизъюнктов из S для получения резольвент. Такой перебор организовывается следующим образом:

1. Пусть $S_0 = S$ – исходное множество дизъюнктов. Будем считать, что S_0 упорядочено.

2. Пусть дизъюнкт D_2 пробегает по порядку множество дизъюнктов S_0, начиная со второго.

3. В качестве дизъюнкта D_1 берем последовательно дизъюнкты из S_0, предшествующие D_2 начиная с первого, и формируем последовательность S_1 (порядок на S_1 определяется порядком добавления дизъюнктов в S_1), состоящую из всевозможных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2.

4. Предположим, что получены последовательности дизъюнктов $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$ и n>1. Тогда последовательность S_n получается следующим образом. В качестве D_2 берутся по порядку дизъюнкты из S_{n-1}, а в качестве D_1 – дизъюнкты из $S_0 \cup S_1 \cup .... \cup S_{n-1}$, предшествующие D_2. Последовательность S_n будет состоять из всевозможных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2.

5. Процесс порождения резольвент прекращается, как только получается пустой дизъюнкт.

Под уровнями имеются ввиду последовательности $S_0, S_1, ..., S_n ....$.

Пример. Перебор возможных вариантов дизъюнктов из S для получения резольвент по стратегии насыщения уровней. Допустим, имеется множество дизъюнктов $S = \{X \vee Y, \overline{X} \vee \overline{Y}, X \vee Z, \overline{X} \vee Z, \overline{Z}\}$:

S_0 : (1) $X \vee Y$,

(2) $\overline{X} \vee \overline{Y}$

(3) $X \vee Z$

(4) $\overline{X} \vee Z$

(5) $\overline{Z}$

S_1 : (6) $Y \vee \overline{Y}$ (*из*(1)*и*(2))

(7) $X \vee \overline{X}$ (*из*(1)*и*(2))

(8) $\overline{Y} \vee Z$ (*из*(2)*и*(3))

(9) $Y \vee Z$ (*из*(1)*и*(4))

(10) Z (*из*(3)*и*(4))

(11) X (*из*(3)*и*(5))

(12) $\overline{X}$ (*из*(4)*и*(5))

S_2 : (13) $X \vee Y$ (*из*(1)*и*(6))

(14) $\overline{X} \vee \overline{Y}$ (*из*(2)*и*(6))

(15) $X \vee Y$ (*из*(1)*и*(7))

(16) $\overline{X} \vee \overline{Y}$ (*из*(2)*и*(7))

(17) $X \vee Z$ (*из*(3)*и*(7))

(18) $\overline{X} \vee Z$ (*из*(4)*и*(7))

(19) $X \vee Z$ (*из*(1)*и*(8))

(20) $\overline{Y} \vee Z$ (*из*(6)*и*(8))

(21) $\overline{X} \vee Z$ (*из*(2)*и*(9))

(22) $Y \vee Z$ (*из*(6)*и*(9))

(23) Z (*из*(8)*и*(9))

(24) # (*из*(5)*и*(10))

Видно, что порождено много лишних дизъюнктов. Так, 6 и 7– тождественно истинные дизъюнкты. Удаление или добавление тождественно истинного дизъюнкта не влияет на выполнимость множества дизъюнктов, поэтому такие дизъюнкты должны быть удалены из вывода. Некоторые дизъюнкты порождаются неоднократно, например, $X \vee Y, \overline{X} \vee \overline{Y}, Y \vee Z$. Отсюда вытекает следствие о том, что с целью оптимизации процесса выбором дизъюнктов для получения резольвенты необходимо управлять.

Стратегия предпочтения.

Данная стратегия основывается на стратегии насыщения уровней. Стратегия предпочтения основывается на выборе более коротких дизъюнктов. Она также осуществляет перебор вариантов, но с некоторым изменением алгоритма:

1. Пусть $S_0 = S$ – исходное множество дизъюнктов. Будем считать, что S_0 упорядочено.

2. Сначала в качестве D_2 берется самый короткий дизъюнкт из S_0 (если таких несколько, то они перебираются по порядку). Затем более длинные и т.д. Пусть дизъюнкт D_2 пробегает по порядку множество дизъюнктов S_0, начиная со второго.

3. В качестве дизъюнкта D_1 берем самые короткие дизъюнкты из S_0, предшествующие D_2 начиная с первого, и формируем последовательность S_1 (порядок на S_1 определяется порядком добавления дизъюнктов в S_1), состоящую из всевозможных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2. Затем более длинные и т.д.

4. Предположим, что получены последовательности дизъюнктов $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$ и n>1. Тогда последовательность S_n получается следующим образом. В качестве D_2 берется самый короткий дизъюнкт из S_{n-1} (затем более длинные и т.д.), а в качестве D_1 – самый короткий дизъюнкт $S_0 \cup S_1 \cup .... \cup S_{n-1}$ (затем более длинные и т.д.), предшествующие D_2. Последовательность S_n будет состоять из всевозможных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2.

5. Процесс порождения резольвент прекращается, как только получается пустой дизъюнкт.

Такая стратегия в применении к тому же множеству дизъюнктов S дает следующее:

S_0 : (1) $X \vee Y,$

(2) $\overline{X} \vee \overline{Y}$

(3) $X \vee Z$

(4) $\overline{X} \vee Z$

(5) $\overline{Z}$

S_1 : (6) X $(из(3)и(5))$

(7) $\overline{X}$ $(из(4)и(5))$

(8) $Y \vee \overline{Y}$ $(из(1)и(2))$

(9) $X \vee \overline{X}$ $(из(1)и(2))$

S_2 : (10) $\overline{Y} \vee Z$ $(из(2)и(3))$

(11) $Y \vee Z$ $(из(1)и(4))$

(12) Z $(из(3)и(4))$

(13) $\overline{Y}$ $(из(2)и(6))$

(14) Z $(из(2)и(6))$

(15) Y $(из(1)и(7))$

(16) Z $(из(3)и(7))$

(17) $\#$ $(из(6)и(7))$

Как видно, данная стратегия приводит к выводу меньшим числом итераций. Однако, по-прежнему содержатся повторяющиеся и тождественно истинные дизъюнкты.

Стратегия вычеркивания.

Стратегия вычеркивания применяется для решения проблемы порождения избыточного числа дизъюнктов.

Дизъюнкт D^0 называется **поддизъюнктом** D если D^0 является некоторой частью дизъюнкта D. При этом D называется **наддизъюнктом** для D^0. Например, если $D = x \vee F \vee y$, а $D^0 = x \vee F$, то D^0 - поддизъюнкт, а D наддизъюнкт для D^0.

Стратегия вычеркивания зависит от того, как удаляются из множества, полученного методом насыщения уровня, тавтологии и наддизъюнкты. Стратегия вычеркивания будет полной, если ее использовать вместе с методом насыщения уровня следующим способом:

1. Сначала выписываются дизъюнкты из множества $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$ по порядку.

2. Затем вычисляются резольвенты путем сравнения каждого дизъюнкта $D_1 \in (S_0, S_1, ..., S_{n-1})$ с дизъюнктом $D_2 \in S_{n-1}$.

3. Если резольвента является тавтологией или наддизъюнктом какого-либо дизъюнкта из списка уже построенных, она вычеркивается, в противном случае добавляется к порождаемому списку дизъюнктов S_n.

Применение стратегии к прежнему множеству дизъюнктов дает следующее:

S_0: (1) $X \vee Y,$

(2) $\overline{X} \vee \overline{Y}$

(3) $X \vee Z$

(4) $\overline{X} \vee Z$

(5) $\overline{Z}$

S_1: (6) $Y \vee Z$ $(из (1) и (4))$

(7) $\overline{Y} \vee Z$ $(из (2) и (3))$

(8) Z $(из (3) и (4))$

(9) X $(из (3) и (4))$

(10) $\overline{X}$ $(из (4) и (5))$

(11) $\overline{Y}$ $(из (5) и (6))$

(12) Y $(из (5) и (7))$

(13) $\#$ $(из (5) и (8))$

Рассмотренные стратегии являются *полными* в том смысле, что если множество дизъюнктов S невыполнимо, то из S пользуясь стратегией можно вывести пустой дизъюнкт.

Упражнения

1. Дано множество дизъюнктов: $S = \{\overline{A} \vee C, \overline{D} \vee C, A \vee B \vee C, C \vee D, A \vee D, \overline{A}, \overline{C}\}$. Требуется доказать, что оно противоречиво. При этом необходимо использовать все три рассмотренных стратегии и оценить эффективность каждой по количеству проделанных итераций.

2. Докажите методом резолюций правила дилемм:

$$а)\ \frac{A \to B, B \to C, A \vee B}{C} \qquad б)\ \frac{A \to B, A \to C, \overline{B} \vee \overline{C}}{\overline{A}}$$

$$в)\ \frac{A \to B, C \to D, A \vee C}{B \vee D} \qquad г)\ \frac{A \to B, C \to D, \overline{B} \vee \overline{D}}{\overline{A} \vee \overline{C}}$$

Вопросы для повторения

3. Опишите алгоритм работы стратегии насыщения уровней?
4. Опишите алгоритм работы стратегии предпочтения?
5. Опишите алгоритм работы стратегии вычеркивания?
6. Что дают стратегии формирования резольвент для метода резолюций?

9.4. Пример реализации системы логического вывода с применением правила резолюций

Логический вывод используется в интеллектуальных системах (в частности экспертных системах) с целью получения нового знания, обоснования решения, доказательства теорем и так далее. Рассмотрим пример реализации логического вывода средствами логики высказываний на примере экспертной системы. Построение экспертной системы основывается на знаниях эксперта. В данном курсе не будет рассмотрены классификация экспертных систем, механизмов их реализации и так далее. Но необходимо осознавать, что применение систем данного класса далеко не безгранично, несмотря на их практическую эффективность. Связано это в первую очередь со сложностью формализации знаний. В состав любой экспертной системы входят база знаний и механизм логического вывода. Следовательно, перед разработкой экспертной системы необходимо систематизировать объекты и взаимосвязи рассматриваемой предметной область. К хорошо структурированным предметным областям (формализованы знания) относятся, например, юриспруденция (кодексы, конституция) и медицина (справочники заболеваний и лекарственных препаратов).

Таким образом, возьмем в качестве предметной области уголовный кодекс РФ и на примере отдельных статей построим базу знаний и рассмотрим механизм реализации простейшего логического вывода сопоставляющего известные факты и выдающего соответствующую стать уголовного кодекса. Целью примера не ставится реализация полноценной базы знаний, поэтому для краткости будут рассмотрены лишь несколько статей. При этом некоторые формулировки будут представлены не в полном соответствии с исходным документом.

Рассмотрим пункт 2 статьи 25 «Преступление, совершенное умышленно». Преступление признается совершенным с прямым **умыслом**, если лицо **осознавало** общественную **опасность** своих **действий** (бездействия), **предвидело** возможность или неизбежность **наступления** общественно опасных **последствий** и **желало** их **наступления**.

Определим на основании анализа текста пункта переменные, необходимые для построения правила:

П – преступление;

У – умысел;

ООД – осознанность опасности своих действий (бездействия),

ПНП – лицо предвидело возможность наступления общественно опасных последствий;

ЖН – лицо желало наступления общественно опасных последствий.

Таким образом, правило будет выглядеть следующим образом:

$$П \wedge У \wedge ООД(Б) \wedge ПНП \wedge ЖН \to С25.2$$

На языке логики высказываний оно звучит следующим образом: Если было преступление и был умысел и была осознанность опасности своих действий (бездействий) и было предвидение наступления опасных последствий и было желание наступления опасных последствий, то статья 25 пункт 2.

Подготовим исходное правило к виду КНФ. Проведем следующую цепочку преобразований:

$$\overline{П \wedge У \wedge ООД(Б) \wedge ПНП \wedge ЖН} \vee С25.2$$

$$\overline{П} \vee \overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ЖН} \vee С25.2$$

Рассмотрим пункт 3 статьи 25 «Преступление, совершенное умышленно». Преступление признается совершенным с косвенным **умыслом**, если лицо **осознавало** общественную **опасность** своих **действий** (бездействия), **предвидело** возможность **наступления** общественно опасных **последствий**, **не желало**, но сознательно **допускало** эти **последствия** либо относилось к ним безразлично.

Введем дополнительную переменную и составим правило:

ДП – допускало последствия.

$$П \wedge У \wedge ООД \wedge ПНП \wedge \overline{ЖН} \wedge ДП \rightarrow С25.3$$

Аналогичным образом подготовим исходное правило к виду КНФ:

$$\overline{П \wedge У \wedge ООД \wedge ПНП \wedge \overline{ЖН} \wedge ДП} \vee С25.3$$

$$\overline{П} \vee \overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee ЖН \vee \overline{ДП} \vee С25.3$$

Рассмотрим пункт 2 статьи 26 «Преступление, совершенное по неосторожности». Преступление признается совершенным по легкомыслию, если лицо **предвидело** возможность **наступления** общественно опасных **последствий** своих действий (бездействия), но без достаточных к тому оснований самонадеянно рассчитывало на предотвращение этих последствий.

ПП - предотвращение последствий.

$$П \wedge \overline{У} \wedge ПНП \wedge ПП \rightarrow С26.2$$

$$\overline{П \wedge \overline{У} \wedge ПНП \wedge ПП} \vee С26.2$$

$$\overline{П} \vee У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ПП} \vee С26.2$$

Рассмотрим пункт 3 статьи 26 «Преступление, совершенное по неосторожности». Преступление признается совершенным по небрежности, если лицо **не предвидело** возможности **наступления** общественно опасных **последствий** своих действий (бездействия), хотя при необходимой внимательности и предусмотрительности **должно было и могло предвидеть** эти последствия.

МПП – лицо могло предвидеть последствия.

$$П \wedge \overline{У} \wedge ПНП \wedge МПП \rightarrow С26.3$$

$$\overline{П \wedge \overline{У} \wedge ПНП \wedge МПП} \vee С26.3 \quad \backslash$$

$$\overline{П} \vee У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{МПП} \vee С26.3$$

Рассмотрим пункт 2 статьи 28 «Невиновное причинение вреда». Деяние признается также совершенным невиновно, если лицо, его совершившее, хотя и **предвидело** возможность **наступления** общественно опасных **последствий** своих действий (бездействия), но **не могло предотвратить** эти последствия в силу несоответствия своих психофизиологических качеств требованиям экстремальных условий или нервно-психическим перегрузкам.

$$\overline{П} \wedge \overline{У} \wedge ПНП \wedge \overline{МПП} \to C28.2$$

$$\overline{\overline{П} \wedge \overline{У} \wedge ПНП \wedge \overline{МПП}} \vee C28.2$$

$$П \vee У \vee \overline{ПНП} \vee МПП \vee C28.2$$

Продолжая изучение содержания каждого пункта статей уголовного кодекса составляется полная база знаний. Ограничившись рассмотренными статьями мы получили следующую базу знаний, приведенную к КНФ:

1. $\overline{П} \vee \overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ЖН} \vee C25.2$
2. $\overline{П} \vee \overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee ЖН \vee \overline{ДП} \vee C25.3$
3. $\overline{П} \vee У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ПП} \vee C26.2$
4. $\overline{П} \vee У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{МПП} \vee C26.3$
5. $П \vee У \vee \overline{ПНП} \vee МПП \vee C28.2$

Рассмотрим механизм логического вывода. Допустим нам известно, что было преступление, то есть известен факт преступления $П$. Тогда, применив правило резолюций к каждому правилу получим слудующие правила:

1. $\overline{П} \vee \overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ЖН} \vee C25.2$
2. $\overline{П} \vee \overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee ЖН \vee \overline{ДП} \vee C25.3$
3. $\overline{П} \vee У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ПП} \vee C26.2$ $\xrightarrow{П}$
4. $\overline{П} \vee У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{МПП} \vee C26.3$
5. $П \vee У \vee \overline{ПНП} \vee МПП \vee C28.2$

Пятое правило $П \vee У \vee \overline{ПНП} \vee МПП \vee C28.2$ было опущено из соображения того, что мы уже никогда не получим статью 28.2, так как не избавимся от переменной $П$, говорящей о факте преступления. Это обусловлено тем, что для того чтобы избавиться от нее необходимо на вход системы подать $\overline{П}$, противоречащее показаниям $П$. А это в свою очередь влечет к путанице в показаниях и новому выводу в системе.

1. $\overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ЖН} \vee C25.2$
2. $\overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee ЖН \vee \overline{ДП} \vee C25.3$
3. $У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ПП} \vee C26.2$
4. $У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{МПП} \vee C26.3$

Допустим, что стало известно о том, что был умысел $У$.

1. $\overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ЖН} \vee C25.2$
2. $\overline{У} \vee \overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee ЖН \vee \overline{ДП} \vee C25.3$
3. $У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ПП} \vee C26.2$ $\xrightarrow{У}$
4. $У \vee \overline{ПНП} \vee \overline{МПП} \vee C26.3$

По аналогичным причинам отпадают правила три и четыре.

1. $\overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ЖН} \vee C25.2$
2. $\overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee ЖН \vee \overline{ДП} \vee C25.3$

Допустим, стало известно о том, что лицо предвидело возможность наступления общественно опасных последствий $ПНП$ и была осознанность опасности своих действий (бездействия) $ООД$.

1. $\overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee \overline{ЖН} \vee C25.2$
2. $\overline{ООД} \vee \overline{ПНП} \vee ЖН \vee \overline{ДП} \vee C25.3$ $\xrightarrow{ПНП,ООД}$

Тогда:

1. $\overline{ЖН} \vee C25.2$
2. $ЖН \vee \overline{ДП} \vee C25.3$

Продолжая анологичные рассуждения можно сказать, что возможны 2 ситуации:

1. Истинно высказывание $ЖН$, тогда отбрасывается 2е правило и вывод статья 25 пункт 2.

2. Ложно высказывание $\overline{ЖН}$, тогда отбрасывается 1е правило и остается 2е правило $\overline{ДП} \vee C25.3$. В данном случае, если становится известно об истинности $ДП$, то система сообщает о том, что в ней отсутствует подходящее правило, в противном случае факты говорят о статье 25 пункт3.

Упражнения

1. На основании изложенного примера сформируйте систему логического вывода для конкретной предметной области. В качестве предметной области могут выступать, например:

а) постановка диагноза;

б) правила дорожного движения;

в) назначение стипендии;

г) устранение неполадок в ПК;

д) и другие предметные области, в которых правила относительно хорошо структурированы.

Вопросы для повторения

1. С чего необходимо начинать построение системы логического вывода?
2. Каким образом осуществляется преобразование логических высказываний с целью применения метода резолюций?
3. Все ли предметные области можно формально представить на языке логики высказываний?
4. Приведите пример предметных областей, в которых необходимо построение систем логического вывода?
5. Является ли система логического вывода искусственным интеллектом?
6. Существуют ли другие подходы построения автоматизированного логического вывода?

9.5. Метод аналитических таблиц

При работе метода аналитических таблиц (или метода семантических таблиц) отсутствует необходимость приведения формулы к КНФ. Метод работает с формулами, представленными в ДНФ. При этом метод работает с четырьмя основными логическими связками конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и импликация. Данный метод, как и метод резолюций, относится к методам опровержения, то есть для доказательства общезначимости (доказуемости) формулы F доказывается тождественная ложность ее противоречие $\overline{F}$. Идея метода основывается на следующих утверждениях:

1. Для конъюнкции двух формул $F_1 \wedge F_2$ достаточно выяснить равенство нулю одной из формул.

2. Для дизъюнкции двух формул $F_1 \vee F_2$ необходимо выяснить равенство нулю обеих формул.

Таким образом, любая сколь угодно сложная формула будет расщепляться. Для четырех связок могут быть следующие варианты формул (связка и ее отрицание):

$$X \wedge Y \qquad \overline{X \wedge Y}$$
$$X \vee Y \qquad \overline{X \vee Y}$$
$$X \to Y \qquad \overline{X \to Y}$$
$$\overline{X} \qquad \overline{\overline{X}}$$

Другого вида формул быть не может. Все эти формулы разделяются на формулы конъюнктивного типа α, состоящие из двух компонент α_1 и α_2, и формулы дизъюнктивного типа β, аналогично состоящие из двух компонент β_1 и β_2. При этом если формула имеет один из указанных видов, то она расщепляется на две половинки по следующим правилам расщепления:

формулы конъюнктивного вида			**формулы дизъюнктивного вида**		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$X \wedge Y$	X	Y	$\overline{X \wedge Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$
$\overline{X \vee Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \vee Y$	X	Y
$\overline{X \to Y}$	X	$\overline{Y}$	$X \to Y$	$\overline{X}$	Y
$\overline{X}$	$\overline{X}$	$\overline{X}$			
$\overline{\overline{X}}$	X	X			

Идея метода заключается в следующем. Необходимо построить некоторое дерево, описывающее данное расщепление, в котором необходимо все расщепить по максимуму (до литер) и получить контрарную пару в каждой ветке.

Правила построения дерева:

1. Если формула вида α, то обе половинки α_1 и α_2 строятся в одной ветке.

$$\begin{array}{c}\alpha\\ \downarrow\\ \alpha_1\\ \downarrow\\ \alpha_2\end{array}$$

2. Если формула вида β, то половинки β_1 и β_2 расщепляются на две ветки.

$$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{\beta}\\ \hline \downarrow & \downarrow\\ \beta_1 & \beta_2\end{array}$$

Таким образом, аналитическая таблица для произвольной формулы F представляет собой последовательность строк, где первая строка состоит из одной-единственной формулы F. Каждая строка аналитической таблицы получается из предыдущей, применением одного из правил расщепления к какой-нибудь означенной формуле. В дальнейшем (при построении аналитической таблицы) количество столбцов (ветвей) может увеличиваться, поскольку каждое применение правила с ветвлением разделяет предыдущий столбец на два других столбца.

В результате расщепления могут быть получены следующие варианты:

- каждая ветка либо замкнется (замкнутая аналитическая таблица), то есть получатся контрарные пары, что тождественно пустому дизъюнкту;

- либо никаких расщеплений дальше уже сделать нельзя.

В итоге все дерево будет либо полностью расщеплено, либо все ветки на этом дереве замкнутся. Если формула не общезначима, то для нее нельзя построить замкнутой аналитической таблицы, т.е. аналитическая таблица для этой формулы будет содержать такой столбец (или столбцы), что никакое применение какого-либо правила редукции не приводит к замыканию этого столбца.

Рассмотрим постановку задачи, для решения которой пригоден метод аналитических таблиц. **Доказать**, что из посылок (формул) $A_1, A_2, ..., A_n$, следует некоторое следствие В» $\frac{A_1, A_2, ..., A_n}{B}$. Данная задача эквивалентна следующей записи $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$. Как говорилось данный метод относится к методам опровержения, следовательно, первая строка таблицы содержит формулу $\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B}$.

Если таблица окажется замкнутой, то между формулами $A_1, A_2, ..., A_n$, с одной стороны, и формулой B, с другой, имеется отношение логического следования. А если отношения следования между посылками и заключением нет, то соответствующую замкнутую аналитическую таблицу построить нельзя.

При построении доказательств в аналитических таблицах можно ограничиться единственной рекомендацией (эвристикой), а именно: если в образовавшихся строках появились формулы типа α (правила без ветвления) и типа β (правила с ветвлением), то удобнее сначала применять правила без ветвления (к формулам типа β).

Пример. Доказать методом аналитических таблиц $\dfrac{A \oplus B, A \to B}{\overline{A}}$ (истинность $\overline{A}$ если известно, что истинны посылки $A \oplus B, A \to B$), что эквивалентно записи $((A \oplus B) \wedge (A \to B)) \to \overline{A}$.

Доказательство методом аналитических таблиц основывается на доказательстве несовместимости отрицания исходной формулы.

1. Следовательно, применяется отрицание к исходной формуле $\overline{((A \oplus B) \wedge (A \to B)) \to \overline{A}}$.

2. Для построения таблицы необходимо формулу представить в виде двух подформул $X = (A \oplus B) \wedge (A \to B)$ и $Y = \overline{A}$, следовательно, мы можем применить правило расщепления $\overline{X \to Y}$ типа α. Аналогичным образом производится дальнейшее расщепление подформул.

$$\overline{((A \oplus B) \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \overline{\overline{A}}}$$

$$\Downarrow$$

$$(A \oplus B) \wedge (A \rightarrow B)$$

$$\downarrow$$

$$A$$

$$\Downarrow$$

$$A \rightarrow B$$

$$\downarrow$$

$$(\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$$

$$\downarrow$$

$$A$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc}
\downarrow & \downarrow & \\
A & A & \\
\downarrow & \downarrow & \\
A \rightarrow B & A \rightarrow B & \\
\downarrow & \downarrow & \\
\overline{A} \wedge B & A \wedge \overline{B} & \\
\Downarrow & \Downarrow & \\
A & A & \\
\downarrow & \downarrow & \\
A \rightarrow B & A & \\
\downarrow & \downarrow & \\
\overline{A} & \overline{B} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
B & \overline{A} & B \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\# & \# & \#
\end{array}$$

Поскольку все ветки (подстолбцы) ведут к противоречию, то из этого факта следует, что наше предположение о ложности формулы неверно. Таким образом, формула является истинной.

Пример. Доказать методом аналитических таблиц правило транзитивности $\dfrac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$, что эквивалентно записи $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

1. Применяется отрицание к исходной формуле $\overline{((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)}$.

2. Для построения таблицы необходимо формулу представить в виде двух подформул $X = ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C))$ и $Y = (A \rightarrow C)$, следовательно, мы можем

применить правило расщепления $\overline{X \to Y}$ типа α. Аналогичным образом производится дальнейшее расщепление подформул.

$$\begin{array}{c}
\overline{((A\to B)\wedge(B\to C))\to(A\to C)} \\
\Downarrow \\
(A\to B)\wedge(B\to C) \\
\downarrow \\
\overline{A\to C} \\
\Downarrow \\
A\to B \\
\downarrow \\
B\to C \\
\downarrow \\
A \\
\downarrow \\
\overline{C} \\
\Downarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Downarrow \\
B\to C \\
\downarrow \\
A \\
\downarrow \\
\overline{C} \\
\hline
\begin{array}{cc}
\downarrow & \downarrow \\
\overline{A} & B \\
\downarrow & \Downarrow \\
\# & B \\
 & \downarrow \\
 & A \\
 & \downarrow \\
 & \overline{C} \\
 & \downarrow \\
 & \begin{array}{cc}
 \hline
 \downarrow & \downarrow \\
 \overline{B} & C \\
 \downarrow & \downarrow \\
 \# & \#
 \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Поскольку все ветки (подстолбцы) ведут к противоречию, то из этого факта следует, что наше предположение о ложности формулы неверно. Таким образом, формула является истинной.

Упражнения

1. Докажите методом аналитических таблиц схемы логически верных рассуждений:

а) Закон противоречия $\dfrac{A\to B, A\to \overline{B}}{\overline{A}}$;

б) Правило контрапозиции: $\dfrac{A\to B}{\overline{B}\to \overline{A}}$;

в) Правило сложной контрапозиции: $\dfrac{(A\wedge B)\to C}{(A\wedge \overline{C})\to \overline{B}}$;

г) Правило сечения: $\dfrac{A\to B, (B\wedge C)\to D}{(A\wedge C)\to D}$;

д) Правило импортации: $\dfrac{A\to (B\to C)}{(A\wedge B)\to C}$;

е) Правило экспортации: $\dfrac{(A \wedge B) \to C}{A \to (B \to C)}$.

Вопросы для повторения

1. В чем заключается удобство метода аналитических таблиц?
2. О чем говорят формулы типа α ?
3. В чем состоит особенность применения формул типа β ?
4. Перечислите формулы конъюнктивного типа?
5. Перечислите формулы дизъюнктивного типа?
6. Почему метод аналитических таблиц называют методом опровержения?

Глава 10. Введение в логику предикатов

Логика высказываний является наиболее изученным видом математической формализации высказываний. Основными механизмами формализации высказываний являются бинарные (одна унарная) операции, представляющие собой логические связки, описывающие все возможные схемы взаимодействия объектов предметной области. В логике высказываний атомарным выражением законченной мысли является непосредственно высказывание, рассматриваемое как единое (нераздельное) целое. Ни структура высказывания, ни его содержание не затрагиваются. В то же время и в науке, и на практике используются выражения, существенным образом зависящие как от структуры, так и от содержания используемых в них высказываний.

Логика предикатов, являющаяся развитием логики высказываний, позволяет формализовать более сложные высказывания и исследовать их структуру. ***Предикат*** - повествовательное предложение, содержащее предметные переменные, определённые на соответствующих множествах. При замене переменных конкретными значениями (элементам) этих множеств предложение обращается в высказывание, т.е. принимает значение «истинно» или «ложно».

Логика предикатов расчленяет высказывание на объект (подлежащее) и предикат (сказуемое). Объект - это то, о чем что-то утверждается в высказывании. Предикат - это то, что утверждается об объекте.

С помощью логических связок (и скобок) предикаты могут объединяться в разнообразные логические формулы - ***предикатные формулы***.

10. 1. Основы логики предикатов первого порядка. Выполнимость и истинность

Рассмотрим высказывание «11 - простое число». В данном высказывании «11» - объект, «простое число» - предикат. Высказывание «11 - простое число» утверждает, что «11» обладает свойством «быть простым числом». Таким образом, если в данном высказывании заменить конкретное число «11» на переменную X из множества натуральных чисел, то получится выражение «X - простое число». При одних значениях X (например, 1, 3, 5, 7, 11, 13 или 17) это выражение истинно, при других (например, 2, 4, 6, 8 или 10) - ложно. Выражение «X - простое число» определяет логическую функцию одной переменной X, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения из множества {истина, ложь}. Данная функция в виде предиката может быть записана как простое_число(X) или P(X).

Одноместный предикат P(x) - всякая функция одного переменного, в которой аргумент x пробегает значения из некоторого множества M, а функция при этом принимает одно из двух значений: истина или ложь.

Пример. Рассмотрим 4 высказывания:

A - «Рубль - валюта России»;

B - «Евро - валюта Франции»;

C - «Евро - валюта Германии»;

D - «Евро - валюта России».

Высказывания A, B и C - истинны, а D - ложно. Если вместо конкретных наименований валюты в выражении A, B, C, D подставить предметную переменную *x* и определить её на множестве наименований денежных единиц *x*={*рубль, евро, доллар,..,ена}*, то получим одноместный предикат, например, *P(x) – «x- валюта России»*.

Если в выражениях A, B, C, D вместо конкретных наименований валюты и государства подставить соответственно переменные *x* и *y*, где $y \in$ *{Россия, Франция, Германия, США,..,Казахстан}*, то получится **двухместный предикат** *P(x,y)* - *«x валюта y»*. Общим для этих предикатов является то, что приписав значения входящим в них переменным из соответствующих областей определения, получается высказывание, обладающие свойством «истинно» или «ложно».

n-местный предикат **-** это функция $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от *n* переменных, принимающих значения из некоторых заданных предметных областей, так что $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n$**,** а функция *P* принимает два логических значения – «истинно» или «ложно».

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является функцией типа $P: M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \to B$, где множества, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называются ***предметными областями*** предиката; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ***предметными переменными*** предиката**;** *B* = **{**1,0**}.**

Множество $I_P \subset M$, на котором предикат принимает только истинные значения, называется **областью истинности предиката** P(x).

Например, для предиката *P*(*x*) – «*x* – простое число», определённого на множестве натуральных чисел *N*, область истинности I_P представляет собой множество всех простых чисел.

Тождественно истинный предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание, для которого $I_P = M$.

Тождественно ложный предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание, для которого I_P - пустое множество.

Выполнимый (опровержимый) предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ последний превратится в истинное (ложное) высказывание.

<u>Закономерности взаимосвязей между предикатами различных типов:</u>

1. Каждый тождественно истинный предикат является выполнимым, но обратное неверно.

2. Каждый тождественно ложный предикат является опровержимым, но обратное неверно.

3. Каждый не тождественно истинный предикат будет опровержимым, но не будет тождественно ложным.

4. Каждый не тождественно ложный предикат будет выполнимым, но не будет тождественно истинным.

Таким образом, обладая всеми достоинствами логики высказываний, логика предикатов позволяет получить доступ к отдельным частям атомарных выражений, что, в свою очередь, расширяет возможности логического вывода.

Упражнения

1. Каким отношениям и функциям соответствуют следующие предикаты, определённые на множестве натуральных чисел:

а) Предикат тождества $E:N^2 \rightarrow B$:
$E(a_1,a_2)=1$ тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$.

б) Предикат порядка $Q:N^2 \rightarrow B$:
$Q(a_1,a_2)=1$ тогда и только тогда, когда $a_1 \leq a_2$.

в) Предикат делимости $D:N^2 \rightarrow B$:
$D(a_1,a_2)=1$ тогда и только тогда, когда a_1 делится на a_2.

г) Предикат суммы $S:N^3 \rightarrow B$:
$S(a_1,a_2,a_3)=1$ тогда и только тогда, когда $a_1+a_2=a_3$.

д) Предикат произведения $П:N^3 \rightarrow B$:
$П(a_1,a_2,a_3)=1$ тогда и только тогда, когда $a_1*a_2=a_3$.

2. Проиллюстрировать на примере предиката порядка, определённого в задаче 1, понятие истинного, ложного и переменного высказываний.

Вопросы для повторения

1. Что называют n-местным предикатом?
2. Что является предметной областью предиката?
3. Что является предметной переменной предиката?
4. В чем специфика соответствий между предикатами, отношениями, функциями?
5. Что называют переменным высказыванием?

10. 2. Логические операции над предикатами

Так как высказывания в логике предикатов принимают два значения (истинно и ложно), поэтому к ним применимы все операции логики высказываний. Рассмотрим применение операций логики высказываний к предикатам на примерах одноместных предикатов. Пусть на некотором множестве М определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Конъюнкция двух предикатов $P(x)$) и $Q(x)$ – предикат $P(x) \wedge Q(x)$, который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение «истина» и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях. Следовательно, область истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$ является общая часть областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, т.е. пересечение $I_P \cap I_Q$.

Дизъюнкция двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ – предикат $P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях. Следовательно, область истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является объединение областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, то есть объединение $I_P \cup I_Q$.

Отрицание предиката $P(x)$ - предикат $\overline{P(x)}$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «истина». Следовательно, область истинности предиката $\overline{P(x)}$ является разность области определения предиката M и области истинности предиката $P(x)$, то есть $I_{\bar{P}} = M \setminus I_P$.

Импликация предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ - предикат $P(x) \to Q(x)$, который является ложным при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение «истина», а $Q(x)$ – значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

10.3. Кванторные операции над предикатами

Пусть *P (x)* - предикат, определенный на *M,* т.е. $x \in M$.

Квантор всеобщности $\forall x\, P(x)$ - высказывание, истинное, когда $P(x)$ тождественно истинный на множестве *M* предикат, и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от *x*. Соответствующее ему словесное выражение будет: «Для всякого *x* $P(x)$ истинно».

Квантор существования $\exists x\, P(x)$ - высказывание, которое является истинным, если существует хотя бы один элемент $x \in M$, для которого $P(x)$

истинно, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет: «Существует x, при котором $P(x)$ истинно».

Переход от $P(x)$ к $\forall x\, P(x)$ или $\exists x\, P(x)$ называется ***связыванием* переменной** x, или ***навешиванием квантора* на переменную** x (или на предикат $P(x)$**)**.

Переменная, на которую навешен квантор, называется ***связанной переменной***, несвязанная квантором переменная называется ***свободной переменной***.

Выражения $\forall x\, P(x)$ и $\exists x\, P(x)$ не зависят от x и при фиксированных P и M имеют вполне определенные значения, представляя вполне конкретные высказывания относительно всех x предметной области М. Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты и вообще на любые логические выражения.

Пример. Пусть x определен на множестве людей M, а $P(x)$ - предикат «x – смертен». Дать словесную формулировку предикатной формулы $\forall x\, P(x)$.

Выражение $\forall x\, P(x)$ означает «все люди смертны». Оно не зависит от переменной x, а характеризует всех людей в целом, т.е. выражает суждение относительно всех x множества M.

При комбинации кванторов очень важен порядок их использования, например, для двухместного предиката «x любит y» $P(x, y)$ заданного на множестве людей:

- $\forall x \exists y$ любит(x, y) – любой x любит хотя бы одного y;
- $\forall y \exists x$ любит(x, y) – каждого y любит хотя бы один x;
- $\exists x \forall y$ любит(x, y) – существует такой x, который любит всех;
- $\exists y \forall x$ любит(x, y) – существует такой y, которого любят все;
- $\forall x \forall y$ любит(x, y) и $\forall y \forall x$ любит(x, y) – все любят всех;
- $\exists x \exists y$ любит(x, y) – существует такой x, который любит хотя бы одного из y;
- $\exists x \exists x$ любит(x, y) – существует такой y, которого любит хотя бы один x.

Упражнения

1. Пусть x определён на множестве людей М, а Р(x)- предикат «x-смертен». Дать словесную формулировку предикатной формулы $\forall x P(x)$.
2. Записать предикатной формулой предложение «Любой человек имеет родственника».
3. Пусть предикат Р(x,y) описывает отношение «x в браке с y» на множестве людей. Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на обе переменные. Дать словесную интерпретацию полученных высказываний.

4. На множестве М задан одноместный предикат P(x). Выразить следующие утверждения формулами:

а) «существует не менее одного элемента x, удовлетворяющего предикату P(x)»;

б) «существует не более одного элемента x, удовлетворяющего предикату P(x)»;

в) «существует точно один элемент x, удовлетворяющий предикату P(x)».

Вопросы для повторения

1. Что называют квантором общности?
2. Что называют квантором существования?
3. Что подразумевают под навешиванием квантора на переменную?
4. В чем разница между связанными и свободными переменными?

10.4. Формулы логики предикатов и эквивалентные соотношения

Это понятие вводится аналогично понятию формулы алгебры высказываний. Сначала задается алфавит символов, из которых будут составляться формулы:

1. Символы $p, q, r, \ldots$ – переменные высказывания, принимающие два значения: 1 – истина, 0 – ложь.

2. Предметные переменные – $x, y, z, \ldots$, которые пробегают значения из некоторого множества $M : x^0, y^0, z^0, \ldots$ – предметные константы, то есть значения предметных переменных.

3. $P(), F()$ – одноместные предикатные переменные; $Q(.,\ldots,.,..), R(.,\ldots,.,..)$ – n-местные предикатные переменные. $P^0(.), Q^0(.,\ldots,.,..)$ – символы постоянных предикатов.

4. Символы логических операций: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$.

5. Символы кванторных операций: $\forall x, \exists y$.

6. Вспомогательные символы: скобки, запятые

Определение формулы логики предикатов:

1. Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является формулой.

2. Если $F(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ – n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметные переменные или предметные постоянные, не обязательно все различные, то $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть формула. В этой формуле предметные переменные являются свободными.

3. Если A и B – формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой свободной, то слова $A \wedge B, A \vee B, A \to B$ есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.

4. Если A – формула, то $\overline{A}$ – формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы A к формуле $\overline{A}$ не меняется.

5. Если A(x) – формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ являются формулами, причем предметная переменная в них входит связанно.

6. Никакая другая строка символов формулой не является.

Формулы, определенные в пунктах 1 и 2, называются **элементарными** (или атомарными). Формулы, не являющиеся элементарными, называются **составными**.

Упражнения

1. Подберите сигнатуру и представьте следующие рассуждения в виде последовательности формул логики предикатов:

1.1. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми второкурсниками, а некоторые из второкурсников – спортсмены. Следовательно, ряд первокурсников знаком с некоторыми спортсменами.

1.2. Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей – члены клуба. Игорь – совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба.

1.3. Таможенные чиновники обыскивают всякого, кто въезжает в страну, кроме высокопоставленных лиц. Некоторые люди, способствующие провозу наркотиков, въезжали в страну и были обысканы исключительно людьми, также способствовавшими провозу наркотиков. Никто из высокопоставленных лиц не способствовал провозу наркотиков. Следовательно, некоторые из таможенников способствовали провозу наркотиков.

Множество тождественно истинных формул (ТИ-формул) логики предикатов входит в любую теорию, исследование этого множества - важная цель логики предикатов. При этом выделяются две проблемы:

1) получение ТИ-формул (проблема построения *порождающей процедуры* для множества ТИ-формул);

2) проверка формулы на истинность (проблема *разрешающей процедуры).*

В отличие от логики высказываний в логике предикатов прямой перебор всех значений переменных может быть невозможен, если предметные переменные имеют бесконечные области определения. Поэтому в логике предикатов используются различные косвенные приемы, в том числе *эквивалентные соотношения,* позволяющие выполнить корректные преобразования предикатных формул. В логике предикатов справедливы все эквивалентные соотношения логики высказываний, а также собственные эквивалентные соотношения, включающие кванторы $\forall$ и $\exists$ (ниже под Y будем понимать переменное высказывание или формулу, не содержащую x):

$$\overline{\forall x P(x)} \approx \exists x \overline{P(x)} \qquad (1)$$

$$\overline{\exists x P(x)} \approx \forall x \overline{P(x)} \qquad (2)$$

$$\forall x P(x) \approx \overline{\exists x \overline{P(x)}} \qquad (3)$$

$$\exists x P(x) \approx \overline{\forall x \overline{P(x)}} \qquad (4)$$

Используя соотношения (1, 2, 3, 4) можно выразить один квантор через другой. Соотношение (1) означает, что, если не для всех x истинно $P(x)$, то существует x, при котором будет истиной $\overline{P(x)}$. Соотношение (2) означает, что, если не существует x, при котором истинно $P(x)$, то для всех x будет истиной $\overline{P(x)}$. Соотношения (3, 4) получаются из соотношений (1, 2) соответственно, если от обеих их частей взять отрицания и воспользоваться законом двойного отрицания. Соотношения (3, 4) широко используются в логике предикатов при равносильных преобразованиях, если приходится иметь дело с выражениями, содержащими операцию отрицания.

$$(\forall x P_1(x)) \wedge (\forall x P_2(x)) \approx \forall x (P_1(x) \wedge P_2(x)) \qquad (5)$$

$$(\exists x P_1(x)) \vee (\exists x P_2(x)) \approx \exists x (P_1(x) \vee P_2(x)) \qquad (6)$$

$$\forall x (P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \to (\forall x (P_1(x)) \vee (\forall x (P_2(x)) \qquad (7)$$

$$\exists x (P_1(x) \wedge P_2(x)) \to (\exists x P_1(x)) \wedge (\exists x P_2(x)) \qquad (8)$$

$$(\exists x P_1(x)) \wedge (\exists y P_2(y)) \approx \exists x \exists y (P_1(x) \wedge P_2(y)) \qquad (9)$$

$$(\forall x (P_1(x) \vee \forall y P_2(y)) \approx \forall x \forall y (P_1(x)) \vee P_2(y)) \qquad (10)$$

Соотношения (5, 6) показывают дистрибутивность квантора общности $\forall x$ относительно конъюнкции & и квантора существования $\exists x$ относительно дизъюнкции v.

Пример трактовки соотношения (5) «Если ВСЕ люди смертны и ВСЕ люди живут на земле, то можно сказать, что ВСЕ люди смертны и живут на земле».

Для квантора существования соотношение (5) не работает $(\exists x P_1(x)) \wedge (\exists x P_2(x)) \neq \exists x (P_1(x) \wedge P_2(x))$. Например, «СУЩЕСТВУЕТ черная машина и СУЩЕСТВУЕТ красная машина, тогда и только тогда, когда СУЩЕСТВУЕТ черная и красная машина». Это не верное соотношение, так как черная машина и красная машина, это разные объекты. Следовательно, необходимо их по разному обозначить.

Если в этих выражениях поменять местами кванторы $\forall x$ и $\exists x$, то получим соотношения (7, 8), верные лишь в одну сторону. В таких случаях эквивалентных преобразований применяют переименование переменной x в одном из предикатов на новую переменную, например, y и получают соотношения (9, 10).

$$\forall x \forall y (P(x,y) \approx \forall y \forall x (P(x,y) \qquad (11)$$

$$\exists x \exists y (P(x,y) \approx \exists y \exists x (P(x,y) \qquad (12)$$

Соотношения (11, 12) отражают в некотором смысле коммутативность одноименных кванторов (возможность менять местами одноименные кванторы), что несправедливо для разноименных кванторов, например, $\forall x \exists y (P(x,y)$ и $\exists y \forall x (P(x,y)$ не эквивалентны.

$$\forall x (P(x) \wedge Y) \approx \forall x P(x) \wedge Y \qquad (13)$$

$$\forall x (P(x) \vee Y) \approx \forall x P(x) \vee Y \qquad (14)$$

$$\exists x (P(x) \wedge Y) \approx \exists x P(x) \wedge Y \qquad (15)$$

$$\exists x (P(x) \vee Y) \approx \exists x P(x) \vee Y \qquad (16)$$

$$\forall x (Y \to P(x)) \approx Y \to \forall x P(x) \qquad (17)$$

$$\forall x (P(x) \to Y) \approx \exists x P(x) \to Y \qquad (18)$$

$$\exists x (Y \to P(x)) \approx Y \to \exists x P(x) \qquad (19)$$

$$\exists x (P(x) \to Y) \approx \forall x P(x) \to Y \qquad (20)$$

Соотношения (13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20) позволяют формулу Y, не содержащую переменную *x,* выносить за пределы действия квантора, связывающего эту переменную.

Упражнения

1. Будут ли равносильны следующие пары формул:

а) $(\forall x)(F(x) \vee G(x))$ и $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$;

б) $(\exists x)(F(x) \& G(x))$ и $(\exists x)F(x) \& (\exists x)G(x)$;

в) $(\forall x)(F(x) \to G(x))$ и $(\forall x)F(x) \to (\forall x)G(x)$;

г) $(\forall x)F(x) \to (\forall x)G(x)$ и $(\exists x)(\forall y)(F(x) \to G(y))$;

д) $(\exists x)(F(x) \to G(x))$ и $(\exists x)F(x) \to (\exists x)G(x)$;

е) $(\exists x)F(x) \to (\exists x)G(x)$ и $(\forall x)(\exists y)(F(x) \to G(y))$;

ж) $(\exists x)(F(x) \leftrightarrow G(x)$ и $(\exists x)F(x) \leftrightarrow (\exists x)G(x)$;

з) $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$ и $(\forall x)F(x) \leftrightarrow (\forall x)G(y)$.

2. Доказать равносильность формул:

а) $\neg(\exists x)[(\forall y)P(x,y) \to (\forall z)(P(z,z) \vee Q(z)))]$ и $(\forall x)(\forall y)(\exists z)[P(x,y) \& \neg P(z,z) \& \neg Q(z)]$;

б) $\neg(\forall x)[T(x) \to (\exists y)(\forall z)(R(y,z) \& T(z) \to R(z,z)]$ и

$(\exists x)(\forall y)(\exists z)[T(x) \& \neg R(z,z) \& \neg(R(y,z) \to \neg T(z))]$;

в) $(\forall x)[\forall y)P(x,y) \to (\exists z)(P(x,z) \& Q(z)]$ и $(\forall x)(\exists u)[P(x,u) \to Q(u)]$;

г) $F = \neg(\exists x)[(\exists y)T(x,y) \to (\forall z)(S(x,z) \vee Q(z))]$ и $G = (\forall x)(\exists y)(\exists z)[T(x,y) \& \neg(\neg S(x,z) \to Q(z))]$

д) $F = \neg(\forall x)[(\forall y)T(x,y) \to (\exists z)(T(x,z) \& Q(z))]$ и $G = (\exists x)(\forall u)(T(x,u) \& \neg Q(u))$.

Вопросы для повторения

1. Какие существуют проблемы построения ТИ-формул логики предикатов?
2. Что позволяют делать эквивалентные соотношения?

3. Что называют префиксной нормальной формой?
4. Каким образом можно получить формулы в виде ПНФ?

Глава 11. Вывод в логике предикатов методом резолюций

Метод резолюций, рассмотренный в логике высказываний, может быть применен и в логике предикатов. Однако, структура формул логики предикатов подразумевает наличие самого предиката, а также специфических кванторных операций. Следовательно, метод резолюций нельзя применять в том виде, который был использован в логике высказываний. В логике высказываний формулу необходимо было привести к КНФ. В логике предикатов формулу тоже необходимо привести к нормальной форме, а также избавиться от кванторных операций.

11.1. Предваренная нормальная форма

Нормальная форма логики предикатов – если формула содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам. Следовательно, используя соотношения алгебры высказываний и логики предикатов, каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме.

Пример. Привести к нормальной форме формулу $(\exists x P_1(x) \wedge \forall y P_2(y)) \to P_3(z)$.

Сначала избавляемся от импликации.

$(\exists x P_1(x) \wedge \forall y P_2(y)) \to P_3(z) = \overline{(\exists x P_1(x) \wedge \forall y P_2(y))} \vee P_3(z) =$

Затем согласно правил де Моргана

$= \overline{\exists x P_1(x)} \vee \overline{\forall y P_2(y)} \vee P_3(z) =$

И при помощи соотношений (1, 2) вытаскиваем кванторы

$= \forall x \overline{P_1(x)} \vee \exists y \overline{P_2(y)} \vee P_3(z)$

Среди нормальных форм формул логики предикатов важное значение имеют предваренные нормальные формы (ПНФ).

Предваренная нормальная форма – нормальная форма логики предикатов, в которой кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики. ПНФ формулы логики предикатов имеет вид:

$$Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_nF(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

где $Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_n$ - кванторы;

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *F*-формула, не имеющая кванторов, с операциями $\{\wedge, \vee, \neg\}$.

Теорема. Всякая формула логики предикатов может быть приведена к предваренной нормальной форме.

<u>Приведение формулы логики предикатов к виду ПНФ</u>

1. Используя эквивалентные преобразования (21, 22, 23, 24, 25, 26), основанные на эквивалентных преобразованиях логики высказываний, оставить только $\{\wedge, \vee, \neg\}$.

$$P_1(x) \approx P_2(x) = (P_1(x) \to P_2(x)) \wedge (P_2(x) \to P_1(x)) \tag{21}$$

$$P_1(x) \approx P_2(x) = \overline{(P_1(x) \wedge P_2(x)) \vee (\overline{P_1(x)} \wedge \overline{P_2(x)})} \tag{22}$$

$$P_1(x) \to P_2(x) = \overline{P_1(x)} \vee P_2(x) \tag{23}$$

$$P_1(x) \oplus P_2(x) = (\overline{P_1(x)} \wedge P_2(x)) \vee (\overline{P_2(x)} \wedge P_1(x)) \tag{24}$$

$$P_1(x) \uparrow P_2(x) = \overline{P_1(x) \vee P_2(x)} \tag{25}$$

$$P_1(x) \mid P_2(x) = \overline{P_1(x) \wedge P_2(x)} \tag{26}$$

2. Воспользовавшись выражениями (1, 2, 3, 4), а также правилом двойного отрицания (27) и правилами де Моргана (28, 29).

$$\overline{\overline{P(x)}} = P(x) \tag{27}$$

$$\overline{P_1(x) \vee P_2(x)} = \overline{P_1(x)} \wedge \overline{P_2(x)} \tag{28}$$

$$\overline{P_1(x) \wedge P_2(x)} = \overline{P_1(x)} \vee \overline{P_2(x)} \tag{29}$$

представить предикатную формулу таким образом, чтобы символы отрицания были расположены непосредственно перед символами предикатов.

3. Вытащить кванторы при помощи соотношений (5, 6). Для формул, содержащих подформулы вида $\forall x(P_1(x) \vee \forall x P_2(x))$ или $\exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x)$ ввести новые переменные, позволяющие использовать соотношения (9, 10).

4. В результате получаем ПНФ $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которой формулу $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ необходимо привести к конъюнктивной нормальной форме.

Пример. Привести к ПНФ $(\forall x P_1(x)) \oplus (\exists x P_2(x))$.

1. Применяем соотношение (24):

$$(\forall x P_1(x)) \oplus (\exists x P_2(x)) = [\overline{(\forall x P_1(x))} \wedge (\exists x P_2(x))] \vee [\overline{(\exists x P_2(x))} \wedge (\forall x P_1(x))] =$$

2. Протаскиваем образовавшиеся отрицания при помощи (1, 2, 3, 4):

$$= [(\exists x \overline{P_1(x)}) \wedge (\exists x P_2(x))] \vee [(\forall x \overline{P_2(x)}) \wedge (\forall x P_1(x))] =$$

3. Вытаскиваем кванторы при помощи (5, 6, 9, 10). Для этого в левую скобку вводим новую переменную y и вытаскиваем кванторы существования при помощи (9):

$$=[(\exists x\overline{P_1(x)})\wedge(\exists y P_2(y))]\vee[(\forall x\overline{P_2(x)})\wedge(\forall x P_1(x))]=[\exists x\exists y(\overline{P_1(x)}\wedge P_2(y))]\vee[(\forall x\overline{P_2(x)})\wedge(\forall x P_1(x))]=$$

Затем при помощи (5) вытаскиваем квантор всеобщности из правой части

$$=[\exists x\exists y(\overline{P_1(x)}\wedge P_2(y))]\vee[\forall x(\overline{P_2(x)}\wedge P_1(x))]=$$

Для того, чтобы вытащить квантор всеобщности, произведем в правой части замену x на z:

$$=[\exists x\exists y(\overline{P_1(x)}\wedge P_2(y))]\vee[\forall z(\overline{P_2(z)}\wedge P_1(z))]=$$

После этого выносится квантор всеобщности:

$$=\exists x\exists y\forall z[(\overline{P_1(x)}\wedge P_2(y))\vee(\overline{P_2(z)}\wedge P_1(z))]=$$

4. ПНФ говорит о том, что получившаяся формула должна быть представлена в КНФ. Как видно получена дизъюнктивная нормальная форма. Для этого необходимо раскрыть скобки:

$$=\exists x\exists y\forall z[(\overline{P_1(x)}\vee\overline{P_2(z)})\wedge((\overline{P_1(x)}\vee P_1(z))\wedge(P_2(y)\vee(\overline{P_2(z)})\wedge(P_2(y)\vee P_1(z))]$$

Упражнения

1. Привести к ПНФ следующие предикатные формулы:

а) $(\forall x)F(x)\rightarrow(\forall y)G(y)$;

б) $(\exists x)F(x)\rightarrow(\exists x)G(x)$;

в) $(\forall x)F(x)\rightarrow(\exists y)G(y)$;

г) $(\exists x)F(x)\rightarrow(\forall y)G(y)$;

д) $(\forall x)P(x,y)\rightarrow(\exists z)[P(x,z)\vee(\forall u)(Q(u)\rightarrow P(z,z))]$.

Вопросы для повторения

1. Какие существуют проблемы построения ТИ-формул логики предикатов?
2. Что позволяют делать эквивалентные соотношения?
3. Что называют префиксной нормальной формой?
4. Каким образом можно получить формулы в виде ПНФ?

11.2. Сколемовская нормальная форма

ПНФ содержит кванторы общности и существования в том порядке, в котором они входили в исходную формулу. Логический вывод легко применяется к формулам логики предикатов, если в кванторной приставке имеются только кванторы общности. В логике предикатов разработан метод, позволяющий исключить квантор существования из формулы, представленной в ПНФ. Этот метод связан с введением сколемовских функций.

Допустим после преобразований формулы логики предикатов, получена следующая формула в ПНФ:

$$F=\exists x\forall y\exists z\forall u\forall t\exists v[P(x,y,z)\vee P(u,t,v)]$$

где предикаты $P(x, y, z)$ и $P(u,t,v)$ – не содержит кванторов.

Формула F утверждает, что существует x, такой что для любого y существует z, такой что для любого u и для любого t существует такое v, что истинно $P(x, y, z) \vee P(u,t,v)$.

Таким образом, вся формула F говорит о том, что существует такой x, для которого вся формула верна. Следовательно, заменив x во всех предикатах на некоторую константу, можно убрать квантор существования x. То есть, предполагается наличие некой константы, для которой будет выполнима вся формула. Для обозначения констант будет использоваться штрих над переменной. Тогда формула F преобразуется в формулу F_1.

$$F_1 = \forall y \exists z \forall u \forall t \exists v [P(x^{'}, y, z) \vee P(u,t,v)]$$

В полученной формуле F_1 говорится, что для любого y существует такое z и так далее. То есть какое значение переменной y не взять, то для нее найдется такое значение переменной z, что вся формула будет выполнима. Следовательно, присутствует некая функциональная связь между y и z. Обозначим z как функцию от y $z = f(y)$. Функции будем обозначать строчными буквами. При это вид функции не известен. Известно лишь то, что ее можно подобрать. Теперь можно убрать квантор существования z. Тогда формула F_1 преобразуется в формулу F_2.

$$F_2 = \forall y \forall u \forall t \exists v [P(x^{'}, y, f(y) \vee P(u,t,v)]$$

Аналогично убирается квантор существования v. Только в данном случае, присутствует некая функциональная связь между y, u, t и v. Обозначим v как функцию от трех переменных $v = g(y,u,t)$, которую можно неким образом подобрать. Теперь можно убрать квантор существования v. Тогда формула F_2 преобразуется в формулу F_3.

$$F_3 = \forall y \forall u \forall t [P(x^{'}, y, f(y) \vee P(u,t, g(y,u,t)]$$

Таким образом, формула F_3 содержит только кванторы всеобщности, которые можно убрать, так как они говорят о том, что формула выполнима для всех переменных, которые стоят под кванторами всеобщности. Тогда формула F_3 преобразуется в формулу F_4.

$$F_4 = P(x^{'}, y, f(y) \vee P(u,t, g(y,u,t)$$

Сколемовская нормальная форма (СНФ) – это предваренная нормальная форма, в которой неким преобразованием убраны кванторные операции.

Таким образом, если исходная формула F в ПНФ была истинна, то можно подобрать константы и функции таким образом, что формула в СНФ будет также истинна.

<u>Приведение ПНФ к виду СНФ</u>

1. Приведение к СНФ осуществляется слева направо.

2. Поочередно удаляются кванторы существования $\exists x$.

3. Если в ПНФ первым стоит квантор существования переменной x, то в формуле производится замена переменной x на константу $x^{'}$, а квантор $\exists x$ удаляется.

4. Если в ПНФ квантор существования переменной x расположен между кванторами всеобщности, то в формуле производится замена переменной x на некую функцию $x = f()$ от переменных кванторов всеобщности, стоящих перед квантором существования, а квантор $\exists x$ удаляется.

5. Аналогичным образом удаляются все кванторы существования.

5. Таким образом, получается формула в которой присутствуют только кванторы всеобщности, которые можно убрать и получается СНФ.

Пример. Пусть формула представлена в ПНФ $F = \exists x \forall y \exists z[(\overline{P_1(x,y)} \vee (P_2(x,z)) \wedge \overline{P_3(y,z)} \wedge P_2(x,y)]$, которую необходимо привести к СНФ.

Проведем подстановку константы $x^{'}$ вместо переменной x:

$$F = \exists x \forall y \exists z[(\overline{P_1(x,y)} \vee (P_2(x,z)) \wedge \overline{P_3(y,z)} \wedge P_2(x,y)] =$$

$$= \forall y \exists z[(\overline{P_1(x^{'},y)} \vee (P_2(x^{'},z)) \wedge \overline{P_3(y,z)} \wedge P_2(x^{'},y)] =$$

Далее необходимо выразить переменную z как функцию от y $z = f(y)$:

$$= \forall y[(\overline{P_1(x^{'},y)} \vee (P_2(x^{'}, f(y))) \wedge \overline{P_3(y, f(y))} \wedge P_2(x^{'},y)] =$$

И убрать квантор всеобщности:

$$= [\overline{P_1(x^{'},y)} \vee (P_2(x^{'}, f(y))] \wedge \overline{P_3(y, f(y))} \wedge P_2(x^{'},y)$$

Таким образом, получена формула в СНФ.

Упражнения

1. Привести к сколемовской нормальной форме:

а) (∃x)[P(x)&(∀y)(S(y)→T(x,y))],

б) (∀x)[Q(x)→(∃y)(∀u)(R(x,y)&S(y,u))],

в) (∀x)(∀y)(∃z)(∀u)(∃v)[L(x,y,z)&M(z,u,v)

г) (∀x)[(∀y)P(x,y)→(∃z)(Q(x,z)&R(z))]

д) (∀x)[(∃y)P(x,y)→ (∀z)(Q(x,z)∨ P(z))]

е) (∀x)[(∃y)P(x,y)↔(∃z)Q(x,z)].

Вопросы для повторения

1. Каким образом осуществляется приведение к сколемовской нормальной форме?

11.3. Унификация правила резолюций в логике предикатов. Метод резолюций для логики предикатов

Правило резолюций в логике предикатов работает аналогичным образом, как и в логике высказываний. Правило резолюций для логики предикатов первого порядка выглядит следующим образом (при этом формулы находятся в СНФ):

$$\frac{\overline{P(x)} \vee Q(x), P(x) \vee G(x)}{Q(x) \vee G(x)}$$

В данном виде правило резолюций не требует преобразований, заключающихся в приведении предикатов к подобному виду. Однако, для работы правила резолюций в логике предикатов необходимо, чтобы предикатная формула была представлена в СНФ. Следовательно, возможно наличие констант и функций. Отсюда вытекает необходимость унификации предикатов для применения правила резолюций.

Относительно переменных в предикатах будем предполагать, что они связаны кванторами общности, но сами кванторы писать не будем. Отсюда следует, что две одинаковые переменные в разных предикатах можно считать различными.

Допустим получена следующая пара формул в СНФ, содержащих переменные и константу:

$$\frac{\overline{P(x)} \vee Q(x), P(x^{'})}{}$$

Действительно, множество дизъюнктов $S = \{P(x^{'}), \overline{P(x)}\}$ невыполнимо, так как предполагается, что переменная x связана квантором общности.

Данное утверждение основывается на унификации дизъюнктов, то есть приведение к единому виду. Поскольку дизъюнкт $P(x)$ можно прочитать так: для любого x истинно $P(x)$, то $P(x)$ истинно будет и для $x = x^{'}$. Сделав подстановку $x = x^{'}$, получим множество дизъюнктов $S_1 = \{P(x^{'}), \overline{P(x^{'})}\}$. Множество S и S_1 одновременно выполнимы (или невыполнимы). Но из S_1 с помощью прежнего правила резолюций выводится тривиальным образом:

$$\frac{\overline{P(x')} \vee Q(x'), P(x')}{Q(x')}$$

Пример. Допустим даны 2 дизъюнкта $S = \{P(x', x, f(x)), \overline{P(h, y', t)}\}$. Необходимо провести унификацию.

С целью унификации необходимо произвести следующую подстановку: $h = x', \quad x = y', \quad f(x) = f(y'), \quad t == f(y')$. Тогда, $S_1 = \{P(x', y', f(x')), \overline{P(x', y', f(x'))}\}$.

Пример. Допустим даны 2 формулы $P(x, x') \vee Q(y), \overline{P(z', s'')}$. Возможна ли унификация и применение правила резолюций.

В данном примере возможна подстановка: $x = z'$, что приводит к формулам следующего вида $P(z', x') \vee Q(y), \overline{P(z', s'')}$. Однако, дальнейших подстановок сделать нельзя, так как x' и s' это различные константы. Следовательно, для данного примера унификация невозможна, что влечет невозможность применения правила резолюций.

Пример. Допустим даны 2 формулы $P(x, x') \vee Q(x), \overline{P(z', x)}$. Возможна ли унификация и применение правила резолюций.

На первый взгляд в данном примере возникает конфликтная ситуация. С одной стороны необходимо произвести замену $x = z'$, с другой стороны $x = x'$. Но как оговаривалось выше предполагается, что для каждой переменной определен квантор всеобщности. Из чего следует, что две одинаковые переменные в разных предикатах можно считать различными. Таким образом, переменная x для формулы $P(x, x') \vee Q(x)$ и формулы $\overline{P(z', x)}$ различна. Следовательно можно переменную x переобозначить для одной из предикатных формул. Сделаем переименование переменной x на y $\quad x = y$ для первой предикатной формулы $P(x, x') \vee Q(x)$. После переименования переменной получаются следующие предикатные формулы: $P(y, x') \vee Q(y), \overline{P(z', x)}$.

Теперь возможна следующая унификация: $y = z', \quad x = x'$. Тогда,

$$\frac{P(z', x') \vee Q(z'), \overline{P(z', x')}}{Q(z')}$$

Пример. Допустим даны 2 формулы $P(x', y) \vee Q(g(y)), \overline{P(x, f(x))}$. Возможна ли унификация и применение правила резолюций.

С целью унификации необходимо произвести следующую подстановку: $x = x', \quad f(x) = f(x'), \quad y = f(x'), \quad g(y) = g(f(x'))$. Тогда,

$$\frac{P(x', f(x')) \vee Q(g(f(x'))), \overline{P(x', f(x'))}}{Q(g(f(x'))}.$$

Метод резолюций для логики предикатов

1. Приведение предикатной формулы к ПНФ.

2. Приведение ПНФ к СНФ.

3. Проводится унификация дизъюнктов с целью применения правила резолюций.

4. Поиск пустого дизъюнкта.

Раздел 4. Теория графов

Теория графов — раздел дискретной математики, изучающий свойства графов. Граф задается множеством вершин и множеством ребер, соединяющих вершины. При изображении графа не все детали рисунка одинаково важны; в частности, несущественны геометрические свойства ребер (длина, кривизна и т.д.) и взаимное расположение вершин на плоскости.

Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер, который в 1736 году формулирует и предлагает решение задачи о семи кёнигсбергских мостах, ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов. Задача о кёнигсбергских мостах сводится к поиску такого пути, чтобы пройти по каждому мосту без повторения, то есть по одному мосту нельзя пройти дважды. Другим классическим примером может служить задача коммивояжера. Коммивояжер должен посетить несколько городов. При этом ему нельзя посещать один город дважды, а расстояние его маршрута должно быть минимальным.

Графы нашли широкое применение в решении практических задач оптимизации, например, в геоинформационных системах, при проектировании зданий и сооружений, поиск кратчайших путей и так далее. Обусловлено это тем, что средства теории графов дают наглядное и понятное представление о решаемой задаче, а также графы удобны при формализации задачи и дальнейшем исследовании. В настоящее время на языке теории графов формулируются и решаются многие задачи управления, в том числе задачи сетевого планирования и управления, анализа и проектирования организационных структур управления, анализа процессов функционирования и целеполагания, многие задачи принятия решений в условиях неопределенности и др.

Таким образом, в теории графов разработаны и совершенствуются методы и алгоритмы оптимизации различного класса задач, формально представимых структурами в форме графов. К примеру, решение задачи коммивояжера, то есть поиск гамильтонова цикла, может быть найдено при помощи муравьиного алгоритма.

Глава 12. Введение в теорию графов

12.1. Основные понятия теории графов

Граф *G* - совокупность двух множеств: *вершин V и ребер E,* между элементами которых определено *отношение инцидентности*.

Отношение инцидентности – когда каждое ребро $e \in E$ инцидентно ровно двум вершинам $(v', v'') \in V$, которые оно соединяет. При этом вершина v' (v'') и ребро e называются *инцидентными* друг другу, а вершины v' и v'', являющиеся для ребра *e* концевыми точками, называются ***смежными***. Часто вместо $v \in V$ и $e \in E$ пишут соответственно $v \in G$, $e \in G$.

Направленное ребро *(ориентированное ребро) – ребро,* соединяющее две вершины, которое имеет направление от одной вершины к другой и изображается стрелкой, направленной от вершины, называемой *началом,* к вершине, именуемой *концом.*

Ориентированный граф (орграф) - граф, содержащий направленные ребра (дуги) с началом v' и концом v'' (рис.12.1 (а)).

Неориентированный граф (н-граф) - граф, содержащий ненаправленные ребра (дуги), соединяющие вершины v' и v'' (рис.12.1 (б)).

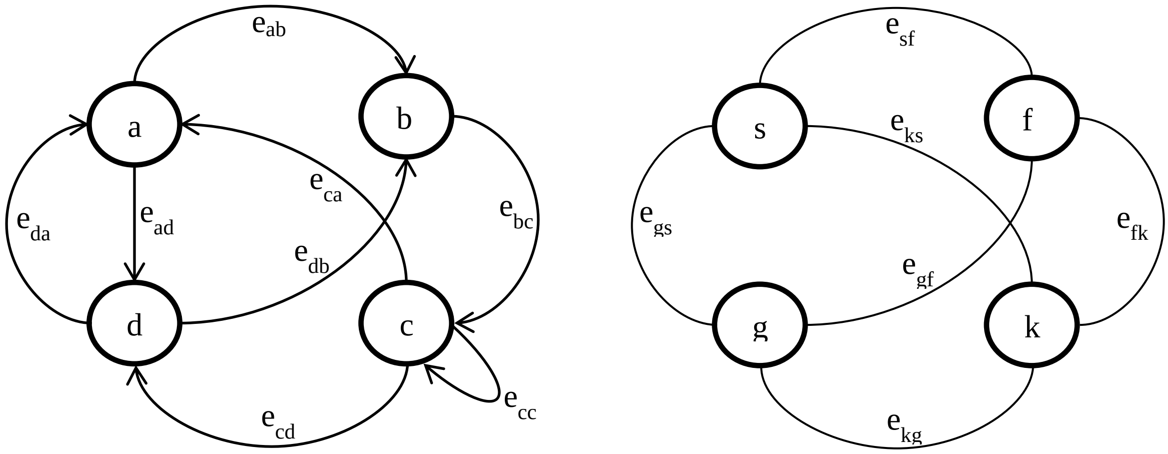


Рис.12.1. Ориентированный (а) и не ориентированный (б) графы

Параллельные ребра (кратные ребра) - ребра, инцидентные одной и той же паре вершин. На рисунке 12.1 (а) кратными является пара ребер e_{ad} и e_{da}.

Мультиграф - граф, содержащий кратные ребра (рис. 12.1(а)).

Петля - ребро, концевые вершины которого совпадают (ребро e_{cc} рис. 12.1(а)).

Конечный граф - граф, у которого множество его элементов (вершин и ребер) конечно.

Пустой граф – граф, у которого множество вершин *V* (а значит и ребер *E)* пусто.

Полный граф - граф без петель и кратных ребер, в котором каждая пара вершин соединена ребром (рис. 12.1(б)).

Дополнение графа *G* - граф $\overline{G}$, имеющий те же вершины, что и граф *G*, и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к графу *G*, чтобы получить полный граф.

Каждому неориентированному графу *канонически соответствует* ориентированный граф с тем же множеством вершин, в котором каждое ребро заменено двумя ориентированными ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющими противоположные направления.

Локальная степень вершины (или просто ***степень)*** $v \in V$ н-графа G - количество ребер *p(v)*, инцидентных вершине *v*.

В н-графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер *m* графа, т.е. четна (предполагается, что в графе с петлями петля дает вклад 2 в степень вершины):

$$\sum_{v \in G} \rho(v) = 2m$$

отсюда следует, что в н-графе число вершин нечетной степени четно.

Для вершин орграфа определяются две локальные степени:

- $\rho_1(v)$ – число ребер с началом в вершине *v*, или количество выходящих из *v* ребер;
- $\rho_2(v)$ - количество входящих в *v* ребер, для которых эта вершина является концом.

Петля дает вклад 1 в обе эти степени.

В орграфе суммы степеней всех вершин $\rho_1(v)$ и $\rho_2(v)$ равны количеству ребер *m* этого графа, а значит, и равны между собой:

$$\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = m$$

Графы G_1 и *G_2 равны,* т.е. $G_1 = G_2$, если их множества вершин и ребер (выраженных через пары инцидентных им вершин) совпадают: $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$.

Полностью заданный граф* G *в строгом смысле - если нумерация его вершин и ребер зафиксирована.

Изоморфные графы - графы, отличающиеся только нумерацией вершин и ребер.

Вопросы для повторения

1. Что называют графом?
2. Что такое отношение инцидентности?
3. Какие вершины называют смежными?
4. Какие ребра графа называют направленными или ориентированными?
5. В чем разница между орграфом и н-графом?
6. Что называется мультиграфом?
7. Что называют петлей в теории графов?
8. В каких ситуациях граф называется конечным графом?
9. В чем особенности пустого и полного графа?
10. Что является дополнением графа?
11. Что показывает локальная степень вершины?

12.2. Способы задания графов

В общем виде задать граф - значит описать множества его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Для описания вершин и ребер достаточно их занумеровать. Пусть $v_1, v_2, ..., v_n$ - вершины графа *G;* $e_1, e_2, ..., e_m$ - ребра. Отношение инцидентности задается:

1. ***Списком ребер*** графа, представленным двумя столбцами: в левом перечисляются все ребра $e \in E$, а в правом инцидентные ему вершины v_i, v_j, для н-графа порядок вершин в строке произволен, для орграфа первым стоит номер начала ребра.

2. ***Матрицей инцидентности*** $\|E_{ij}\|$ размера $n \times m$: по вертикали и горизонтали указываются вершины и ребра соответственно, а на пересечении *i*-й вершины и *j*-го ребра в случае неориентированного графа проставляется 1, если они инцидентны, и 0 - в противном случае:

$$E_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если ребро } \mathrm{e_i} \text{ инцидентно вершине } \mathrm{v_j} \\ 0 \text{ - в противном случае} \end{cases}$$

В случае орграфа: -1, если вершина является началом ребра, 1 - если вершина является концом ребра, и 0 - если вершина и ребро не инцидентны; если некоторая вершина является для ребра и началом, и концом (т.е. ребро - петля), проставляется любое другое число, например, 2:

$$E_{ij} = \begin{cases} -1, \text{если вершина v - начало ребра e;} \\ 1, \text{если вершина v - конец ребра e;} \\ \text{a(любое число отличное от } -1,1,0), \text{если } e_i \text{ петля, } v_j \text{ инцидентна я ей вершина;} \\ 0 \text{ - в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. ***Матрицей смежности*** $\|\delta_{ij}\|$ - квадратной матрицей размера $n \times n$*:* по вертикали и горизонтали перечисляются все вершины $v \in V$, а на пересечении *i-й* и *j-й* вершин в случае н-графа проставляется число, равное числу ребер, соединяющих эти вершины; для орграфа δ_{ij} равно числу ребер с началом в *i-й* вершине и концом в *j-й.*

Если два графа равны, то их матрицы совпадают. Если в графе поменять нумерацию вершин, матрицы (и список ребер) в общем случае изменяются, т.е. вид матриц и списка ребер зависит от нумерации вершин и ребер графа.

Пример. Задать матрицами инцидентности и смежности графы G_1 (рис. 12.1(а)) и G_2 (рис. 12.1(б)).

Матрица инцидентности графа G_1:

$\|E_{G1}\|$	e_{ab}	e_{bc}	e_{cc}	e_{ca}	e_{cd}	e_{db}	e_{da}	e_{ad}
a	-1	0	0	1	0	0	1	-1
b	1	-1	0	0	0	1	0	0
c	0	1	2	-1	-1	0	0	0
d	0	0	0	0	1	-1	-1	1

Матрица инцидентности графа G_2:

$\|E_{G2}\|$	e_{sf}	e_{fk}	e_{kg}	e_{gf}	e_{gs}	e_{ks}
s	1	0	0	0	1	1
f	1	1	0	1	0	0
g	0	0	1	1	1	0
k	0	1	1	0	0	1

Матрица смежности графа G_1:

$\|\delta_{G1}\|$	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	1	1
d	1	1	0	0

Матрица смежности графа G_2:

$\|\delta_{G2}\|$	s	f	k	g
s	0	1	1	1
f	0	0	1	1
k	1	1	0	1
g	1	1	1	0

Пример. Какими особенностями отличается граф *G*, взаимно-однозначно соответствующий бинарному отношению *R*, если *R*:

а) симметрично;

б) антисимметрично;

в) рефлексивно;

г) антирефлексивно;

д) транзитивно.

Пусть бинарное отношение *R* определено на множестве $V=\{v_1,\dots,v_n\}$.

а) Симметричному отношению *R* взаимно однозначно соответствует неориентированный граф без кратных ребер *G(R)* в котором ребро (v', v'') существует, если и только если выполнено $v'Rv''$ (а значит, и $v''Rv'$ в силу симметричности *R*).

б) Антисимметричному отношению *R* взаимно однозначно соответствует ориентированный граф без кратных ребер, не содержащий пар вершин с ребрами, противоположно направленными к разным вершинам.

в) Если *R* рефлексивно, то граф *G(R)* без кратных ребер имеет петли во всех вершинах.

г) Если *R* антирефлексивно, то граф *G(R)* без кратных ребер не имеет петель.

д) Если R транзитивно, то в графе G(R) без кратных ребер для каждой пары ребер (v', v'') и (v'', v''') имеется замыкающее ребро (v', v''').

Упражнения

1. На рис. 12.2 изображен сетевой граф управления стационарным роботом, в котором вершины – это некие операции, а ребра представляют собой логику перехода между операциями. Задать сетевой граф различными способами.

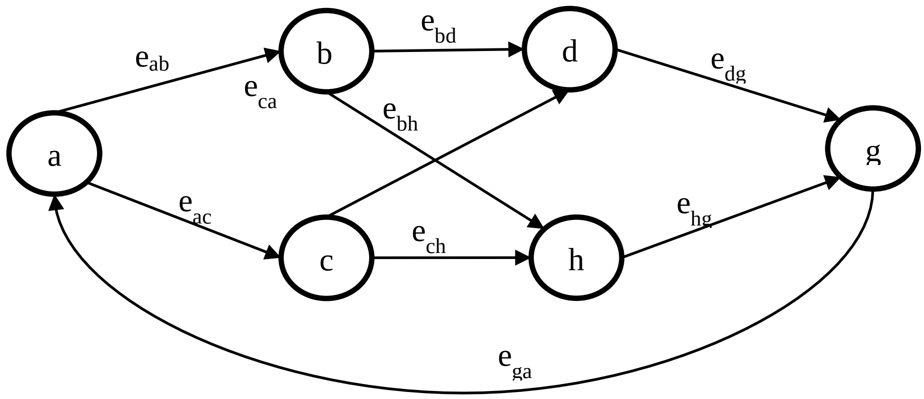


Рис. 12.2. Сетевой граф

2. Изобразить граф, соответствующий отношению, представленному следующей матрицей:

R	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**a**
a	0	1	1	1	0	0
b	1	0	0	0	1	1
c	1	0	0	1	0	1
d	1	0	1	0	1	1
e	0	1	0	1	0	0

Описать свойства заданного отношения.

Вопросы для повторения

1. Что значит задать граф в общем виде?
2. Как задать граф матрицей инцидентности?
3. Как задать граф списком ребер?
4. Как задать граф матрицей смежности?
5. Какой граф можно считать полностью заданным?

6. Какие графы считаются изоморфными?

7. В чем заключается отличие задание ориентированных и неориентированных графов?

12.3. Маршруты, пути, цепи и циклы на графах

Пусть *G* – неориентированный граф.

Маршрут графа *G* - такая последовательность ребер $e_1, e_1, ...e_l, ...e_n$, в которой каждые два соседних ребра e_{l-1} и e_l имеют общую вершину.

В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз. *Начало маршрута* – вершина v_0, инцидентная ребру e_1 и не инцидентная e_2. *Конец маршрута* v_n инцидентен e_n и не инцидентен e_{n-1}. Если e_1, e_2, e_{n-1}, e_n - кратные, требуется дополнительное указание, какую из двух инцидентных вершин считать началом (концом) маршрута.

Циклический маршрут (замкнутый) - маршрут, в котором совпадают его начало и конец $v_0 = v_n$.

Цепь - маршрут, в котором все ребра разные.

Простая цепь - цепь, не пересекающая себя, т.е. не содержащая повторяющихся вершин.

Цикл - циклический маршрут, если он является цепью.

Простой цикл - циклический маршрут, если он является простой цепью.

Связанные вершины $(v', v'') \in G$ - если существует маршрут с началом v' и v'' концом.

Связанные маршрутом вершины связаны также и простой цепью.

Связанный граф *G* – граф, если все его вершины связаны между собой.

Пусть *G* – ориентированный граф, тогда:

Путь - последовательность ребер, в которой конец каждого предыдущего ребра e_{l-1} совпадает с началом следующего e_l (в нем все ребра проходят по их ориентации).

В пути одно и то же ребро может встречаться несколько раз.

Начало пути - является начало v_0 ребра e_1.

Конец пути – конец v_n ребра e_n.

Ориентированная цепь – путь, если каждое ребро встречается в нем не более одного раза.

Простая цепь – путь, если любая вершина графа *G* инцидентна не более чем двум его ребрам.

Контур – путь, в котором $v_0 = v_n$.

Цикл – контур, если он является цепью.

Простой цикл – контур, если он является простой цепью.

Если граф содержит циклы, то он содержит и простые циклы.

Ациклический граф – граф, не содержащий циклов.

Вершина $v'' \in G$ называется ***достижимой*** из вершины $v' \in G$, если существует путь $v', \ldots\ldots\ldots, v''$ с началом v' и концом v''.

Связный орграф *G* – граф, если он связен без учета ориентации дуг.

Сильно связный орграф G - если из любой вершины v' в любую v'' существует путь.

Длина маршрута (пути) - число ребер маршрута (пути).

Расстояние $d(v', v'')$ между вершинами v' и v'' н-графа *G* называется ***минимальная длина простой цепи*** с началом v' и концом v''.

Центр н-графа **-** вершина н-графа, от которой максимальное из расстояний до других вершин являлось бы минимальным.

Радиус графа - максимальное расстояние от центра *G* до его вершины.

Эйлеров цикл – цикл графа, содержащий все ребра графа.

Эйлеров граф – граф, имеющий эйлеров цикл.

Гамильтонов цикл – простой цикл, проходящий через все вершины рассматриваемого графа.

Гамильтонова цепь – простая цепь, проходящая через все вершины графа, с началом и концом в разных вершинах $v_1, v_2 \in G$.

Пример. Для вершин v_1 и v_6 графа *G* на рис.13.1 привести примеры маршрута, цепи, простой цепи; определять в графе циклический маршрут, цикл, простой цикл, приняв вершину v_1 за их начало и конец.

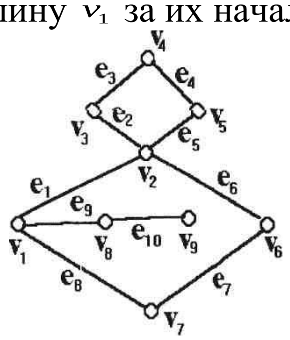


Рис. 13.1. Граф *G*

Для вершин v_1, $v_6 \in G$:

- Маршрут, не являющийся цепью – $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_3, e_1, e_8, e_7, e_6, e_1, e_8, e_7)$ или $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_1, e_8, e_7)$ и т.п.;
- Цепь, не являющаяся простой цепью – $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$;
- Простая цепь - (e_1, e_6) или (e_8, e_7)

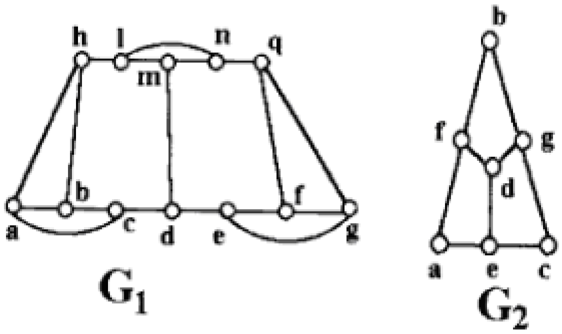
Для вершины v_1:

- Циклический маршрут, не являющийся циклом - $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_1, e_6, e_7, e_8)$;
- Цикл, не являющийся простым циклом - $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$;
- Простой цикл - (e_1, e_6, e_7, e_8)

При описании цикла в качестве его начала и конца может быть выбрана любая вершина, поэтому последовательности (e_1, e_6, e_7, e_8), (e_6, e_7, e_8, e_1), (e_7, e_8, e_1, e_6), (e_8, e_1, e_6, e_7) представляют один и тот же цикл. Более того, часто считается, что можно менять порядок ребер цикла на противоположный, т.е. последовательность (e_8, e_7, e_6, e_1) представляет тот же цикл.

Упражнения

1. Имеют ли графы ниже гамильтоновы циклы, цепи.



Вопросы для повторения

1. Что называют маршрутом в теории графов?
2. Какие вершины называются связанными?
3. Какой путь называется ориентированной цепью?
4. Какой путь называют контуром?
5. Какая вершина называется достижимой?
6. Объясните работу эйлерова цикла и цепи.
7. Объясните работу гамильтонова цикла и цепи.

Глава 13. Гамильтоновы графы

13.1. Введение в гамильтоновы графы

Гамильтонов цикл – простой цикл, проходящий через все вершины рассматриваемого графа.

Гамильтонова цепь – простая цепь, проходящая через все вершины графа, с началом и концом в разных вершинах $v_1, v_2 \in G$.

Гамильтонов граф - граф, если для каждой вершины графа найдется маршрут начинающейся и заканчивающей в этой вершине и проходящий через все вершины только один раз.

Классическая задача коммивояжера заключается в поиске минимального общего веса гамильтонова графа, вершины которого изображают города, а ребра — связывающие их дороги. При этом каждому ребру соответствует весовой коэффициент (например, расстояние между городами или время движения по дороге).

Разработаны алгоритмы поиска гамильтоновых циклов, дающие относительно оптимальное решение. С увеличением размера графа растет и число гамильтоновых циклов, что сильно усложняет задачу поиска оптимального цикла. Поэтому, алгоритмы поиска дают относительно оптимальное решение с циклом минимального общего веса, но найденный цикл будет, как правило, значительно меньшего веса, чем большинство произвольных гамильтоновых циклов.

Поиск гамильтонова цикла может быть осуществлен жадным алгоритмом:

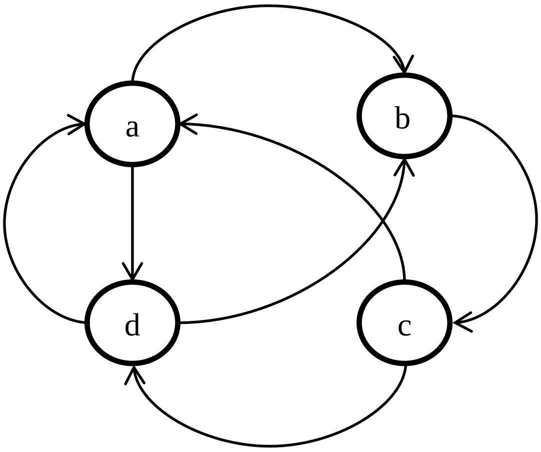
1. Выбор исходной вершины и включить её в маршрут.
2. Выбор вершины ближайшей к данной по весу, включить её в маршрут.
3. Выбор не использованной вершины ближайшей к последней, включить её в маршрут.
4. Вернуться к шагу 2 если не использованы все вершины.
5. Включить в маршрут исходную вершину.

Однако ответ при использовании жадного алгоритма может быть очень далеким от правды.

Другим примером поиска гамильтонова цикла может служить алгоритм честного перебора, то есть рассматриваются все возможные комбинации и сравнивается их суммарный вес. Данный алгоритм дает оптимальное решение. Однако, трудоемкость может быть крайне неоправданной, а в некоторых случаях (графы с огромным числом ребер и вершин) решение будет длиться бесконечно.

13.2. Алгоритмический подход поиска всех гамильтоновых циклов графа

Допустим, дан граф следующего вида:



Рис

Необходимо найти все гамильтоновы циклы, то есть пройти по всем вершинам графа без повторений. Рассмотрим алгоритмический подход пошагово:

1. Строится матрица смежности A.

$$A = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

2. Применяется теорема A^k - матрица смежности в степени k, где коэффициенты α_{ij} матрицы означают количество маршрутов длиной k из $i^{й}$ в $j^{ю}$ вершину. Например, возведя A в степень 10, мы узнаем сколько существует маршрутов из $i^{й}$ в $j^{ю}$ вершину длиной в 10.

На основании данной теоремы покажем алгебраический подход.

3. Организуется вспомогательная матрица B, в которой единицы матрицы A заменяются вершинами, в которые мы попадаем.

$$B = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & b & 0 & d \\ b & 0 & 0 & c & 0 \\ c & a & 0 & 0 & d \\ d & a & b & 0 & 0 \end{array}$$

4. Далее используется основная формула данного алгоритма:

$$P_{k+1}^{'} = B * P_k, \text{ где } P_1 = A$$

При построении матриц $P_k^{'}$ необходимо учитывать важное свойство $ab \neq ba$.

Далее производится преобразование $P_k = \Phi(P_k^{'})$, где Φ - некий оператор, который из матрицы убирает определенные элементы.

Выполним первый шаг.

$$P_2^{'} = B * P_1 = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & d \\ a & b & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & d & b & 0 \\ c & 0 & 0 & c \\ d & a+d & 0 & a \\ 0 & a & b & a \end{bmatrix}$$

Таким образом, мы получили матрицу $P_2^{'}$, в которой, например, $p_{11} = d$ говорит о том, что мы из вершины a идем в вершину d и назад в вершину a, то есть получили цикл. Например, $p_{13} = b$ говорит о том, что мы из вершины a идем в вершину c и назад в вершину a. В данном случае это не цикл, а маршрут.

В элементах матрицы $P_2^{'}$ знак «+» говорит о двух путях.

Отсюда видно, что циклы будут только по диагоналям.

5. Далее обрабатывается $P_2^{'}$, то есть $P_2 = \Phi(P_2^{'})$. Φ обнуляет те элементы матрицы $P_2^{'}$, которые совпадают либо с заголовком строки, либо столбца, так как в матрице $P_2^{'}$ таких нет, то $P_2 = P_2^{'}$.

6. Запускаем следующую итерацию.

$$P_3^{'} = B * P_2 = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & d \\ a & b & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d & d & b & 0 \\ c & 0 & 0 & c \\ d & a+d & 0 & a \\ 0 & a & b & a \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} bc & da & db & bc+da \\ cd & ca+cd & 0 & ca \\ ad & ad+da & ab+db & da \\ ad+bc & ad & ab & bc \end{bmatrix}$$

Далее обрабатывается $P_3^{'}$, то есть $P_3 = \Phi(P_3^{'})$. Φ обнуляет те элементы матрицы $P_3^{'}$, которые совпадают либо с заголовком строки, либо столбца. Следовательно, обнуляем элементы $p_{12} = da$, так как второй множитель совпадает с заголовком строки и $p_{42} = ad$, так как второй множитель совпадает с заголовком строки.

$$P_3 = \Phi(P_3^{'}) = \begin{bmatrix} bc & 0 & db & bc+da \\ cd & ca+cd & 0 & ca \\ ad & ad+da & ab+db & da \\ ad+bc & 0 & ab & bc \end{bmatrix}$$

Запускаем следующую итерацию.

$$P_4^{'} = B * P_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & d \\ a & b & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} bc & 0 & db & bc+da \\ cd & ca+cd & 0 & ca \\ ad & ad+da & ab+db & da \\ ad+bc & 0 & ab & bc \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} bcd+dad+dbc & bca+bcd & dab & bca+dbc \\ cad & cad+cda & cab+cdb & cda \\ abc+dad+dbc & 0 & adb+dab & abc+ada+dbc \\ abc+bcd & bca+bcd & adb & abc+ada+bca \end{bmatrix}$$

Далее обрабатывается $P_4^{'}$, то есть $P_4 = \Phi(P_4^{'})$.

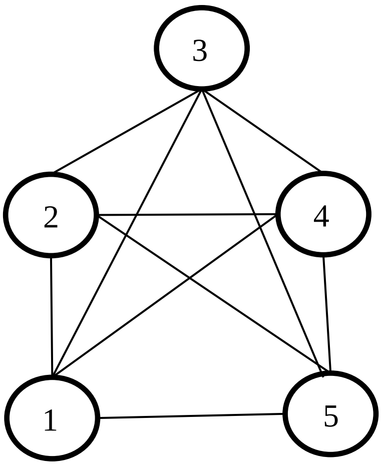
$$P_4 = \Phi(P_4^{'}) = \begin{bmatrix} bcd + d0d + dbc & 0c0 + 0cd & d0b & bc0 + 0bc \\ c0d & cad + cda & 0ab + 0db & c0a \\ 0b0 + d0d + db0 & 0 & adb + dab & ab0 + a0a + db0 \\ 0bc + bc0 & 0ca + 0c0 & a0b & abc + a0a + bca \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} bcd + dbc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cad + cda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & adb + dab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abc + bca \end{bmatrix}$$

Теперь все циклы длиной 4, то есть задействованы все вершины. Оператор Φ предварительно убирал неполноценные циклы. Рассматривается диагональ, так как исходная и конечная вершины для цикла совпадают.

13.3. Муравьиный алгоритм поиска оптимального гамильтонова цикла

Допустим, дан граф, на котором вершины обозначают города, а ребра дороги между ними. Граф не ориентированный, так как по дороге можно проехать в обе стороны. Цель примера дать понятие работы алгоритма, поэтому не рассматриваются варианты, например, с односторонним движением.



Рис

Необходимо найти гамильтонов цикл с минимальной длиной маршрута (задача коммивояжера), то есть пройти по всем вершинам графа без повторений, при этом пройденный путь должен быть минимальным.

Допустим, что мы имеем следующую таблицу распределения расстояний между городами по каждой дороге L_{ij} - расстояние из $i^{го}$ города в $j^{й}$ город и количества феромонов τ_{ij}, обозначающих частоту движения по каждой вершине.

$i*j$	L_{ij}	τ_{ij}

1-2	38	3
1-3	74	2
1-4	59	2
1-5	45	2
2-3	46	1
2-4	61	1
2-5	72	1
3-4	49	2
3-5	85	2
4-5	42	1

Тогда, вероятность перехода из $i^{го}$ города в $j^{й}$ город P_{ij} будет рассчитываться по следующей формуле:

$$P_{ij} = 100\frac{\eta_{ij}^{\beta} * \tau_{ij}^{\alpha}}{\sum_k \eta_{ik}^{\beta} * \tau_{ik}^{\alpha}}$$

Где знаменатель $\sum_k \eta_{ik}^{\beta} * \tau_{ik}^{\alpha}$ служит для нормирования к 1 или 100%;

α и β - некие коэффициенты для вариации (подбираются экспериментально);

k - возможное количество переходов;

$\eta_{ij} = \dfrac{1}{L_{ij}}$ - обратное отношение к расстоянию.

Для простоты примера примем $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ и начальную вершину под номером 1. Тогда, возможное число переходов из вершины 1 $k = 4$. При этом будут получены следующие вероятности перехода:

$$P_{12} = 100\frac{\frac{1}{38} * 3}{\frac{3}{38} + \frac{2}{74} + \frac{2}{59} + \frac{2}{45}} = 100\frac{\frac{3}{38}}{0{,}18} = 42{,}83\%$$

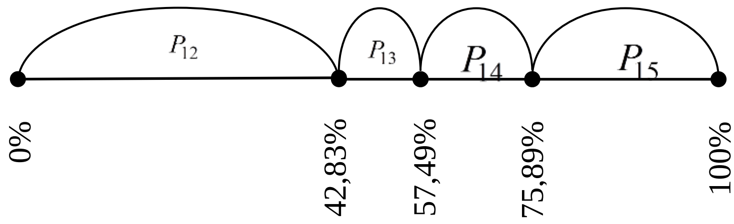
$$P_{13} = 100\frac{\frac{1}{74} * 2}{\frac{3}{38} + \frac{2}{74} + \frac{2}{59} + \frac{2}{45}} = 14{,}66\%$$

$$P_{14} = 100\frac{\frac{1}{59} * 2}{\frac{3}{38} + \frac{2}{74} + \frac{2}{59} + \frac{2}{45}} = 18{,}4\%$$

$$P_{15} = 100\frac{\frac{1}{45} * 2}{\frac{3}{38} + \frac{2}{74} + \frac{2}{59} + \frac{2}{45}} = 24{,}11\%$$

В алгоритм могут быть добавлены элитные муравьи. Элитные муравьи идут туда, где больше вероятность P_{ij}. Добавление таких муравьев в алгоритм увеличивает его сходимость.

Далее рисуем линейку, то есть формируем рулетку, которую развернули в линию.



Далее при помощи генератора случайных чисел (моделируем шарик на рулетке) генерируем число, которое попадает в один из четырех диапазонов. Таким образом, в отличии от элитных муравьев мы даем шанс всем городам. Это важный аспект, так как подобным образом мы не зацикливаемся на наилучшем варианте на данный момент, который в результате может оказаться не самым эффективным.

Допустим генератор случайных чисел сгенерировал число из диапазона для четвертого города, что означает переход из первого города в четвертый.

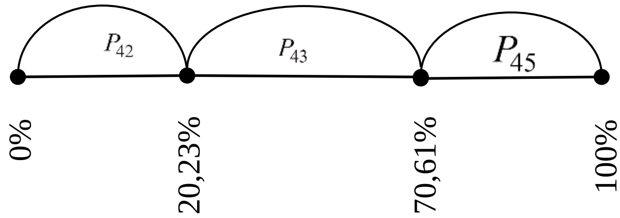
Теперь вычеркивается 1й город, так как в нем уже побывали. В результате из 4го города можно направиться либо во 2й город, либо в 3й город, либо в 5й город. Тогда, возможное число переходов из вершины 4 $k=3$. При этом будут получены следующие вероятности перехода:

$$P_{42}=100\frac{\frac{1}{61}*1}{\frac{1}{61}+\frac{2}{49}+\frac{1}{42}}=20{,}23\%$$

$$P_{43}=100\frac{\frac{1}{49}*2}{\frac{1}{61}+\frac{2}{49}+\frac{1}{42}}=50{,}38\%$$

$$P_{45}=100\frac{\frac{1}{42}*1}{\frac{1}{61}+\frac{2}{49}+\frac{1}{42}}=29{,}39\%$$

Далее рисуем линейку и крутим рулетку.

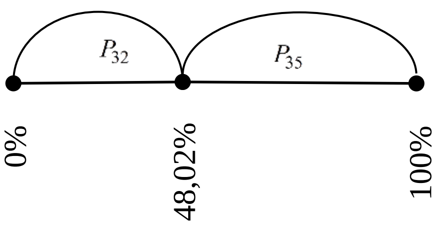


Допустим генератор случайных чисел, сгенерировал число из диапазона для третьего города, что означает переход из четвертого города в третий. Теперь вычеркиваем 4й город. Из 3го города можно пойти либо во 2й либо в 5й. Тогда, возможное число переходов из вершины 3 $k=2$. При этом будут получены следующие вероятности перехода:

$$P_{32}=100\frac{\frac{1}{46}*1}{\frac{1}{46}+\frac{2}{85}}=48{,}02\%$$

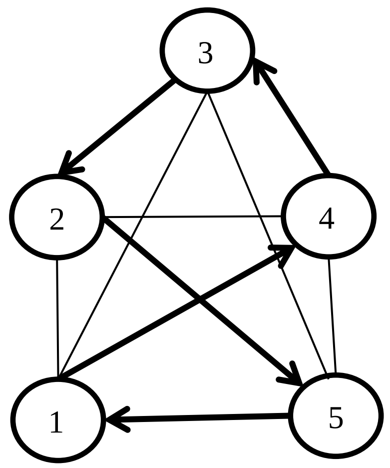
$$P_{35}=100\frac{\frac{1}{85}*2}{\frac{1}{46}+\frac{2}{85}}=51{,}98\%$$

Далее рисуем линейку и крутим рулетку.



Допустим генератор случайных чисел, сгенерировал число из диапазона для второго города, что означает переход из третьего города во второй. Теперь вычеркиваем 3й город.

Теперь остается лишь один вариант в 5й город, так как в остальных уже побывали. Ну а затем снова в 1й город, так как нужно замкнуть цикл.



Считаем длину пути. В нашем случае она получилась:

$$\sum_k L_k = L_{14}+L_{43}+L_{32}+L_{25}+L_{51}=L_0$$

В связи с этим необходимо пересчитать количество оставленных муравьями феромонов:

$$\Delta\tau=\frac{Q}{L_0}$$

Где Q - подбирается так, чтобы $\Delta\tau$ было сопоставимым числу ране оставленных феромонов.

$\Delta\tau$ будет постоянно по всему пути, где прошел первый муравей, то есть по всей длине своего пути он откладывает одинаковое дополнительное значение феромона.

Далее производится перерасчет количества феромонов для каждого варианта перехода из вершины к вершине:

$$\tau_{kj}^{*} = \tau_{kj} + \Delta\tau$$

Где k говорит о том, что перерасчет τ производится только для вершин (а именно ребер), по которым прошел 1й муравей;

τ_{kj}^{*} - новое значение количества феромонов;

τ_{kj} - старое значение количества феромонов.

Еще необходимо учесть, что феромоны со временем (высыхают или стираются). Это важно, так как они могут представлять собой старую информацию и вероятность перехода к более малым феромонам но с более свежей информацией будет мала, так как со временем в старом месте будет много феромонов и все массово пойдут туда.

Поэтому для расчета нового количества феромонов вводят эффект некоего высыхания старых феромонов:

$$\tau_{kj}^{*} = (1-p) * \tau_{kj} + \Delta\tau$$

Где p - некий коэффициент сопоставимый с единицей, соответственно чем больше его значение, тем больше забывчивость.

При $p=1$ - помнятся только предыдущие поколения.

При $p=0$ - помнятся все предыдущие поколения или прохождения всех муравьев.

Далее после перерасчета количества феромонов, запускается следующий муравей.

Раздел 5. Конечные автоматы и сети Петри
Глава 14. Конечные автоматы

14.1. Теоретико-множественное представление автомата

Автомат - дискретный преобразователь информации, способный под действием входных сигналов переходить из состояния в состояние и вырабатывать выходные сигналы.

Абстрактный автомат задается с помощью следующих множеств:

$$A = \{X, Y, S, s_0, fp(X,S), fv(X,S)\},$$

где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – входной алфавит автомата или множество входных символов;

$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ – выходной алфавит автомата или множество выходных символов;

$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}\}$ – алфавит или множество внутренних состояний автомата;

$s_0 \in S$ – начальное состояние автомата (в момент времени $t = 0$).

$fp(X,S)$ – функция переходов;

$fv(X,S)$ - функция выходов автомата.

Конечный автомат - если множества *X, Y, S* конечны.

Автомат функционирует в дискретные моменты времени $t = 0,1,2,\ldots,l$. Автомат можно представить, как некоторое устройство (черный ящик), на которое подаются входные сигналы и снимаются выходные и которое может иметь некоторые внутренние состояния (рис. 15.1).

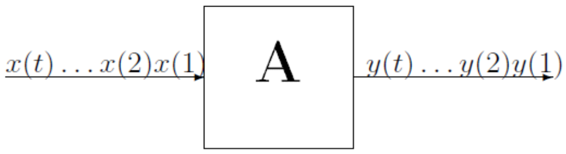


Рис. 14.1. Конечный автомат

В каждый момент времени автомат находится в одном из состояний из множества *S*.

Функция переходов $fp(X,S)$ определяет в каждый момент времени *t* следующее состояние автомата $s_{t+1} \in S$ в зависимости от текущего состояния $s_t \in S$ и входного сигнала $x_t \in X$ или символа входного алфавита. Другими словами, функция $fp(X,S)$ каждой паре «состояние – входной сигнал» ставит в соответствие следующее состояние. Функция переходов может быть записана следующим образом: $s_{t+1} = fp(x_t, s_t)$.

Функция выходов $fv(X,S)$ определяет в каждый момент времени t выходной сигнал автомата.

Существует две модели автоматов – автомат Мили и автомат Мура. Они отличаются функцией выходов, которая определяется следующим образом:

В автомате Мили выходной сигнал в момент времени t зависит как от входного сигнала в момент времени t, так и от текущего состояния $y_t = fv(x_t, s_t)$.

В автомате Мура выходной сигнал явно не зависит от входного и определяется только текущим состоянием $y_t = fv(s_t)$.

Состояние автомата – это память автомата о прошлых входных воздействиях.

Автоматы также называют ***последовательностными машинами*** (Sequential Machines), так как входная последовательность преобразуется в последовательность состояний и выходную последовательность.

Можно сказать, что абстрактный автомат имеет 1 вход и 1 выход. На вход автомата поступают последовательности букв входного алфавита, на выходе формируются выходные последовательности.

Слово или ***цепочка*** – это конечная последовательность символов (букв) входного алфавита. Должны выполняться следующие условия (условия автоматности):

1. Длины входных и выходных слов одинаковы;
2. Одинаковым начальным отрезкам входных слов соответствуют одинаковые начальные отрезки выходных слов.

Автомат называется **полностью определенным автоматом**, если для любой пары «состояние-вход» известны следующее состояние автомата и выход.

В противном случае автомат является не полностью определенным.

Упражнения

1. Опишите при помощи теоретико-множественного представления работу светофора.
2. Конечные автоматы широко используются в технологических процессах, имеющих дискретную структуру, например, роботы сборщики. Изучите доступный технологический процесс и опишите конечный автомат, управляющий им.

Вопросы для повторения

1. Что представляет собой автомат?
2. Какими элементами определяется абстрактный автомат?
3. Почему под автоматом, как правило подразумевают конечные автоматы?
4. С какой целью задаются функция переходов и функция выходов?
5. Каково функциональное назначение состояний автомата?

6. Приведите пример процессов, которые можно формально представить в форме конечного автомата?

7. Что на языке автоматов означают понятия слово и цепочка?

8. В чем особенность моделей Мили и Мура?

14.2. Способы задания автоматов

Существуют следующие способы задания абстрактных автоматов:

1. Табличный.
2. Графический.
3. Матричный.

Не зависимо от способа задания автомата, должны выполняться следующие условия:

1. Для каждого состояния автомата $s_i \in S$ должны быть описаны функции переходов $fp(x_j, s_i)$ для всех входных символов $x_j \in X$. В случае отсутствия функций перехода по некоторым входным символам необходимо доказать, что в данном состоянии невозможно их поступление на вход автомата.

2. Недостижимое состояние – состояние, которое не достигается из начального ни для какой входной цепочки.

2. Мили про выход!

3. Недолжно быть состояний, в которые невозможно попасть.

1. Табличный способ задания автомата

Задание автомата Мили.

Строкам таблицы 14.1 соответствуют состояния, столбцам – входные сигналы (буквы). На пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца записывается состояние, в которое автомат переходит из состояния S_i при подаче на его вход X_j и выходной сигнал Y_p, который вырабатывается при данном переходе.

Таблица 14.1. Табличное представление автомата Мили

S \ X	x_1	x_2	⋮	x_n
s_0	$fp(x_1, s_0)$ / $fv(x_1, s_0)$	$fp(x_2, s_0)$ / $fv(x_2, s_0)$	⋮	$fp(x_n, s_0)$ / $fv(x_n, s_0)$
s_1	$fp(x_1, s_1)$ / $fv(x_1, s_1)$	$fp(x_2, s_1)$ / $fv(x_2, s_1)$	⋮	$fp(x_n, s_1)$ / $fv(x_n, s_1)$
……………………………………				
s_{k-1}	$fp(x_1, s_{k-1})$ / $fv(x_1, s_{k-1})$	$fp(x_2, s_{k-1})$ / $fv(x_2, s_{k-1})$	⋮	$fp(x_n, s_{k-1})$ / $fv(x_n, s_{k-1})$

Иногда автомат задают в виде двух таблиц – таблицы переходов и таблицы выходов. В таблице переходов на пересечении строк и столбцов записываются следующие состояния, в таблице выходов – соответствующие данным переходам выходы.

Задание автомата Мура.

В общем случае автомат Мура представлен отмеченной таблицей 14.2 переходов. Строки таблицы, соответствующие состояниям, отмечены выходными сигналами.

Таблица 14.2. Табличное представление автомата Мура

S \ X	Выходной сигнал	x_1	x_2	…	x_n
s_0	$fv(x_1,s_0)$	$fp(x_1,s_0)$	$fp(x_2,s_0)$	…	$fp(x_n,s_0)$
s_1	$fv(x_1,s_1)$	$fp(x_1,s_1)$	$fp(x_2,s_1)$	…	$fp(x_n,s_1)$
……………………………………					
s_{k-1}	$fv(x_1,s_{k-1})$	$fp(x_1,s_{k-1})$	$fp(x_2,s_{k-1})$	…	$fp(x_n,s_{k-1})$

2. Задание автомата в виде ориентированного графа

Задание автомата Мили.

Вершинам графа ставятся в соответствие состояния автомата, а ребрам – переходы. Стрелка указывает направление перехода. Вершины отмечаются состояниями. На ребрах указывается входной сигнал, вызывающий данный переход, и выходной сигнал, вырабатывающийся при данном переходе.

Пример. Автомат - последовательный сумматор (в двоичной системе счисления). На вход сумматора поступают одноименные разряды слагаемых a_i и b_i, на выходе формируется разряд суммы. Последовательный сумматор является автоматом с памятью – он должен помнить, был или не был перенос из *i-1* разряда.

Входной алфавит автомата $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$:

- $x_1=00$;
- $x_2=01$;
- $x_3=10$;
- $x_4=11$.

Выходной алфавит автомата $Y=\{y_0,y_1\}$:

- $y_0=0$;
- $y_1=1$.

Алфавит состояний автомата $S=\{s_0,s_1\}$:

- s_0 отсутствие переноса;

- s_1 наличие переноса.

Граф переходов автомата имеет следующий вид (рис.14.2).

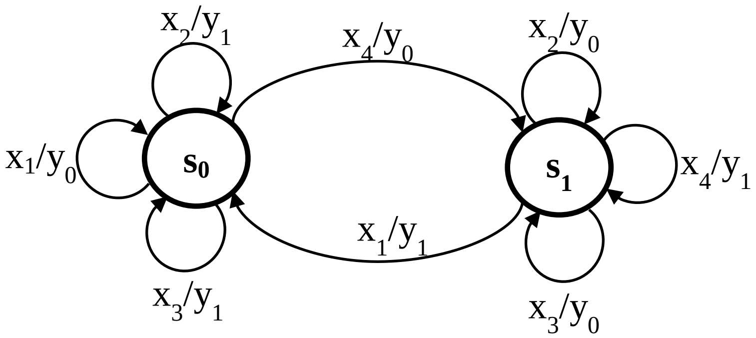


Рис. 14.2. Граф переходов последовательного сумматора в форме Мили

Таблица 14.3. Табличное представление последовательного сумматора в форме Мили

S \ X	x_1	x_2	x_3	x_4
s_0	s_0/y_0	s_0/y_1	s_0/y_1	s_1/y_0
s_1	s_0/y_1	s_1/y_0	s_1/y_0	s_1/y_1

*Задание автомата Мура***.**

Каждая вершина графа отмечается состоянием и выходным сигналом. На ребре указывается только входной сигнал, вызывающий данный переход.

Пример. Автомат - последовательный сумматор (в двоичной системе счисления) задать в виде автомата Мура. Исходные данные аналогичны примеру работы автомата Мили (рис. 14.2).

Входной алфавит автомата $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, выходной алфавит автомата $Y=\{y_0,y_1\}$. Алфавит состояний автомата $S=\{s_0,s_1,s_2,s_3\}$:

- s_0 состояние без переноса и на выходе 0;
- s_1 состояние без переноса и на выходе 1;
- s_2 состояние с переносом и на выходе 0;
- s_3 состояние с переносом и на выходе 1.

Граф переходов автомата имеет следующий вид (рис.14.3).

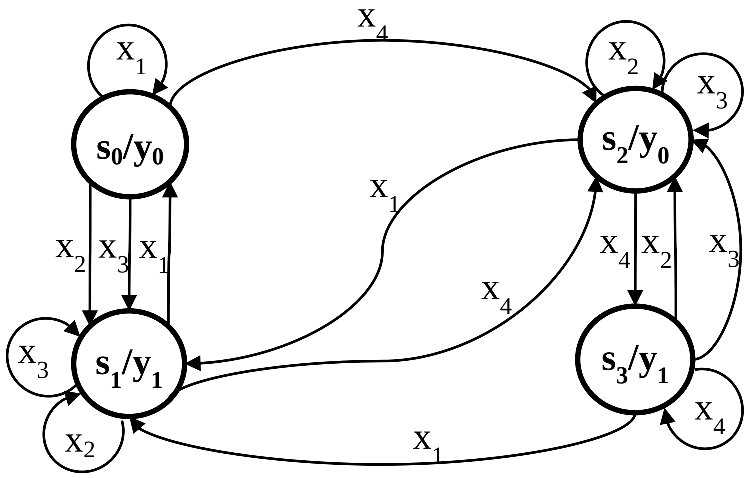


Рис. 14.3. Граф переходов последовательного сумматора в форме Мура

Таблица 14.4. Табличное представление последовательного сумматора в форме Мура

S \ X	Выходной сигнал	x_1	x_2	x_3	x_4
s_0	y_0	s_0	s_1	s_1	s_2
s_1	y_0	s_0	s_1	s_1	s_2
s_2	y_1	s_1	s_2	s_2	s_3
s_3	y_1	s_1	s_2	s_2	s_3

<u>*3. Задание автомата в виде матрицы*</u>

Автомат задается в виде квадратной матрицы, строки и столбцы которой отмечены состояниями.

Автомат Мили.

Если из состояния S_i есть переход в состояние S_j под действием сигнала X_k и при этом вырабатывается сигнал Y_P, то на пересечении i-й строки и j-го столбца записываются входной и выходной сигналы X_K/Y_P соответственно.

Пример. Задание автомата Мили (рис. 15.2).

$$\begin{array}{ccc} & s_0 & s_1 \\ s_0 & x_1/y_0, x_2/y_1, x_3/y_1 & x_4/y_0 \\ s_1 & x_1/y_1 & x_2/y_0, x_4/y_1, x_3/y_0 \end{array}$$

Автомат Мура.

Для задания автомата Мура требуется две матрицы: матрица переходов и вектор выходных сигналов.

Пример. Задание автомата Мура, приведенного на рис. 14.3.

$$\begin{array}{ccccc} & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_0 & x_1 & x_2, x_3 & x_4 & - \\ s_1 & x_1 & x_2, x_3 & x_4 & - \\ s_2 & - & x_1 & x_2, x_3 & x_4 \\ s_3 & - & x_1 & x_2, x_3 & x_4 \end{array}$$ - Матрица переходов

$$\begin{array}{cc} s_0 & y_0 \\ s_1 & y_1 \\ s_2 & y_0 \\ s_3 & y_1 \end{array}$$ - Матрица выходных сигналов

Пример. Построить граф переходов детектора входных последовательностей нулей и единиц. Если на вход автомата поступает последовательность из четырех единиц, то на выходе автомата появляется “1”. Во всех остальных ситуациях на выходе автомата – “0”.

X = {0, 1}; *Y = {0, 1}*. Множество состояний, функцию переходов и функцию выходов определим при построении графа (рис. 5.6). $S = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$.

Состояние S_0 является начальным и хранит информацию о том, что последний входной сигнал был нулем. Состояние S_1 хранит информацию о том, что на вход детектора была подана одна единица, S_2 – о том, что на входе две единицы, S_3 помнит предысторию трех единиц. Автомат представлен на рисунке 14.4.

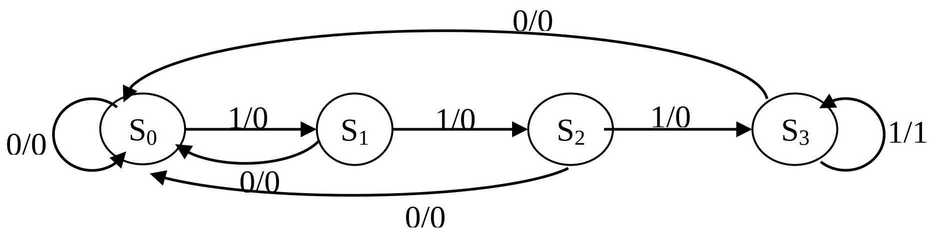


Рис. 14.4. Автомат детектора входных последовательностей нулей и единиц

Упражнения

1. Построить автомат Мура, на вход которого могут поступать монеты достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей. Автомат выдает сигнал «четная сумма», если сумма опущенных монет четная, и «нечетная сумма», если сумма опущенных монет нечетная.
2. Построить автомат банкомата, выдающего наличные денежные средства.
3. Построить автомат работы светофора.
4. Построить автомат светофора, имеющего дополнительные стрелки влево и вправо.

Вопросы для повторения

1. В чем особенность задания автомата Мили?
2. В чем особенность задания автомата Мура?
3. Назовите и охарактеризуйте способы задания автоматов?
4. Проанализируйте каждый способ задания автомата и приведите примеры ситуаций актуальности каждого способа при задании автомата?

14.3. Взаимосвязь моделей Мили и Мура

Для любого автомата Мили существует эквивалентный ему автомат Мура и наоборот. Функция выхода в автомате Мура отображает подмножество множества состояний автомата *S* на множество *Y*. Функция выходов автомата Мили отображает декартово произведение $S \times X$ в *Y*.

Преобразование автомата Мура в автомат Мили

Переход осуществляется следующим образом: так как функция выходов в автомате Мура на один такт запаздывает по отношению к функции выходов автомата Мили, то выходной сигнал из вершины y_t, соответствующей состоянию s_f, в которое автомат переходит, переносится на ребро, отмеченное сигналом, который вызывает данный переход x_k. Фрагмент перехода показан на рис.15.5.

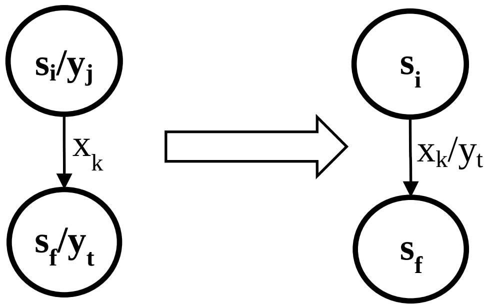


Рис. 14.5. Фрагмент перехода автомата Мура в автомат Мили

Пример. Допустим, задан автомат Мура в виде ориентированного графа (рис. 14.6), который необходимо представить в виде модели Мили.

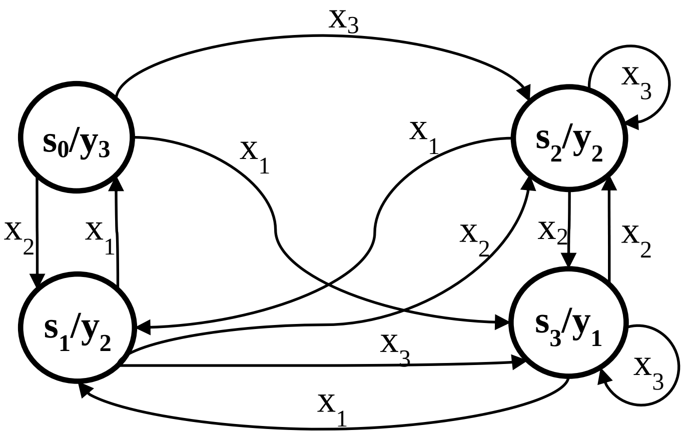


Рис. 14.6. Исходный автомат Мура

В результате преобразования автомата Мура (рис. 14.6.) получим следующий автомат Мили (рис. 14.7). Число состояний полученного автомата Мили равно числу состояний исходного автомата. Таким образом, преобразование является эквивалентным в связи с тем, что в результате его применения происходит только сдвиг на один такт вперед функции выходов, остальное не изменяется.

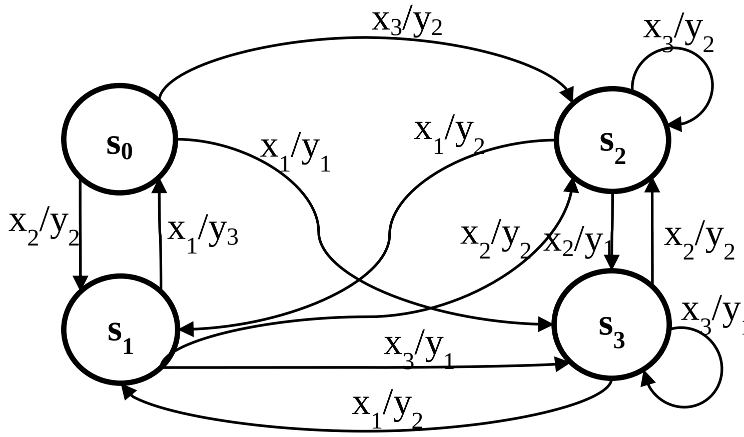


Рис. 14.7. Автомат Мили после преобразования исходного автомата Мура

Преобразование автомата Мили в автомат Мура

Переход от автомата Мили к автомату Мура является более сложным. При этом число состояний полученного автомата может увеличиться.

Каждому состоянию $s_i \in S$ исходного автомата ставится в соответствие множество пар вида s_i / y_j, где $y_j \in Y$, выходной сигнал, вырабатываемый автоматом при переходе в s_i. Каждой такой паре в автомате Мура будет соответствовать состояние, т.е. состояние s_i расщепляется на столько состояний, сколько различных выходных символов вырабатывается при переходе в s_i. Фрагмент перехода показан на рис.15.8.

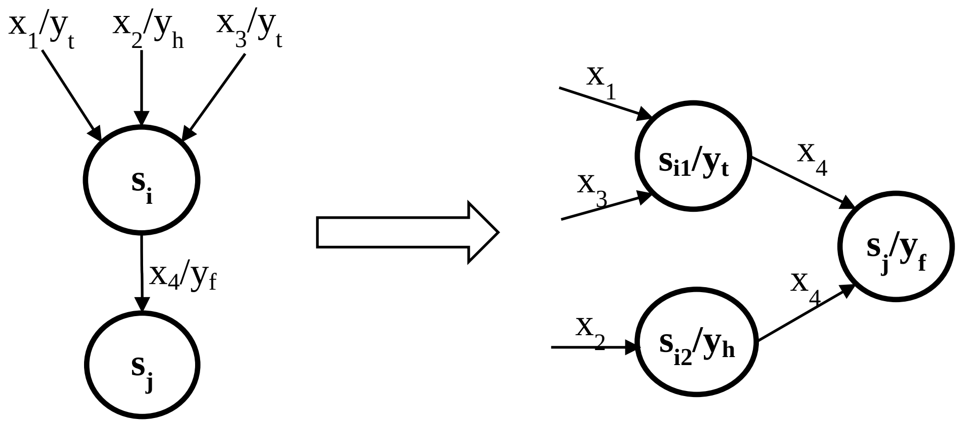


Рис. 14.8. Фрагмент перехода автомата Мили в автомат Мура

В приведенном фрагменте состояние s_i расщепляется на два состояния – s_{i1} и s_{i2}. Все переходы из состояния s_i должны быть сохранены для состояний s_{i1} и s_{i2} эквивалентного автомата (рис. 14.11).

Пример. Допустим, задан автомат Мили в виде ориентированного графа (рис. 14.9), который необходимо представить в виде модели Мура.

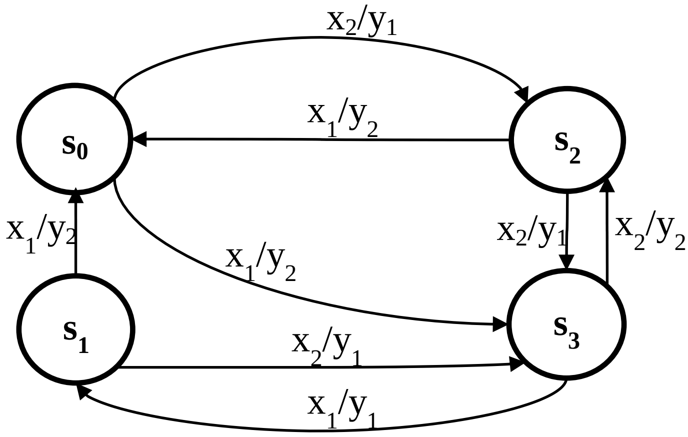


Рис. 14.9. Исходный автомат Мили

В результате преобразования автомата Мили (рис. 14.12.) получим следующий автомат Мура (рис. 14.10). Число состояний полученного автомата Мура увеличилось на два.

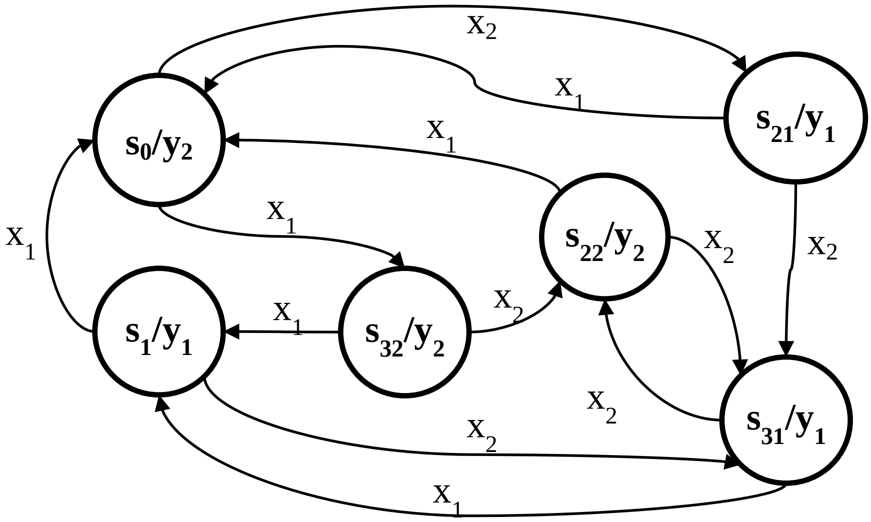
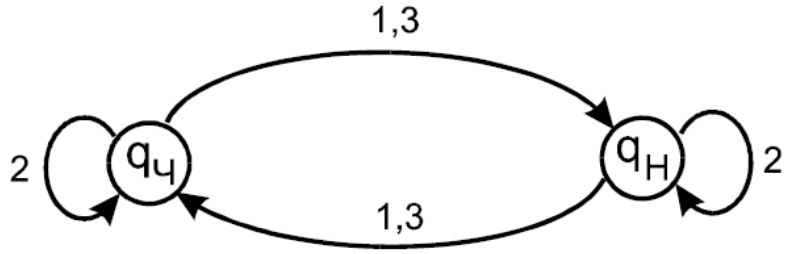


Рис. 15.10. Автомат Мура после преобразования исходного автомата Мили

Упражнения

1. Осуществить переход от автомата Мура, заданного графом к эквивалентному автомату Мили.



2. Преобразовать автомат Мили, заданный таблично в автомат Мура.

Таблица переходов

	q_0	q_1	q_2
x_1	q_1	q_0	q_2
x_2	q_2	q_1	q_1

Таблица состояний

	q_0	q_1	q_2
x_1	y_2	y_1	y_3
x_2	y_4	y_5	y_6

Вопросы для повторения

1. Опишите преобразование автомата Мили в автомат Мура.
2. Опишите преобразование автомата Мура в автомат Мили.

Глава 15. Сети Петри

15.1. Теоретико-множественное представление сети Петри

Сеть Петри – ориентированный граф с двумя типами вершин (вершина-позиция и вершина-переход), в которых дуги соединяют только разноимённые вершины.

Граф является помеченным (маркированным), то есть его вершины-позиции содержат метки (фишки).

Сеть Петри задается с помощью следующих множеств:

$$SP = \{P, T, I, O, \mu_0\},$$

где $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ – конечное множество вершин, называющихся **позициями**;

$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ – конечное множество вершин, называющихся **переходами**;

$I \leq P \times T$ – **входная функция** (бинарное отношение инцидентности, задающее для каждого перехода t_i множество входных позиций);

$O \leq P \times T$ – **выходная функция** (бинарное отношение инцидентности, задающее для каждого перехода t_i множество выходных позиций);

$\mu_0 : P \to N$ – **начальная маркировка сети**, которая в каждой позиции ставит в однозначное соответствие элемент из множества натуральных чисел.

Маркировка μ сети Петри – процесс присвоения фишек (маркеров) позициям сети. Маркировка μ сети Петри определяется как n-мерный вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, где $n = |P|$, а $\mu_i \in N$ – число фишек в позиции p_i, или как комплект, включающий μ_i раз элемент p_i.

Число и расположение фишек могут изменяться при выполнении сети Петри, которое само зависит от числа и распределения фишек по сети.

Выполнение сети Петри - последовательность запусков переходов, в результате которых удаляются фишки из входных и появляются в выходных позициях переходов.

Сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный мультиграф. Мультиграф – граф, допускающий существование кратных дуг от одной вершины графа к другой. Ориентированный граф – граф, содержащий направленные дуги. Двудольный граф – граф, вершины которого можно разделить на два множества (позиции и переходы) таким образом, что каждая дуга будет направлена от элемента одного множества (позиций или переходов) к элементу другого множества (переходов или позиций).

При графическом представлении сети Петри вводятся следующие обозначения:

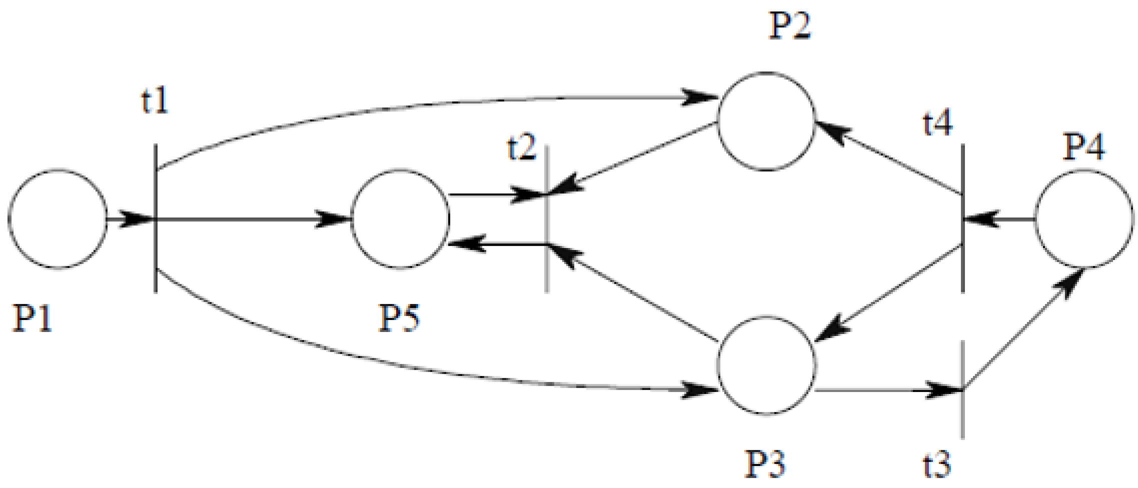
- O – позиция.
- | – переход.

Пример. Эквивалентное представление сети Петри в теоретико-множественной и графовой формах.

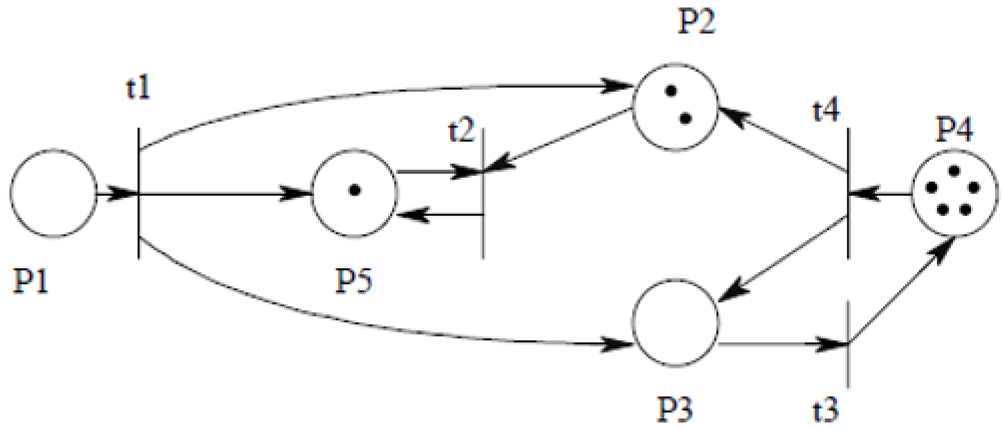
Структура сети Петри C(P, T, I, O), где

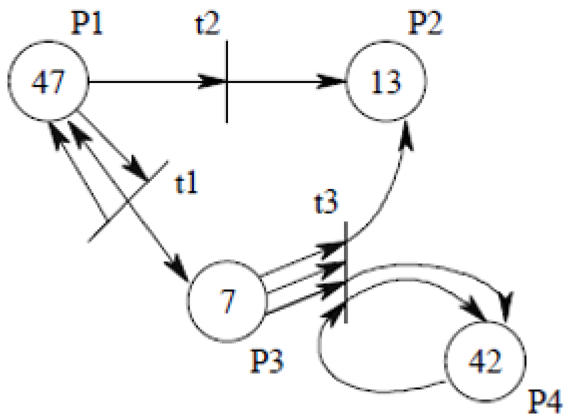
$P\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$,
$T\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$,
$I(t_1) = \{p_1\}$, $I(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\}$, $I(t_3) = \{p_3\}$, $I(t_4) = \{p_4\}$,
$O(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}$, $O(t_2) = \{p_5\}$, $O(t_3) = \{p_4\}$, $O(t_4) = \{p_2, p_3\}$.

Рис. 7.2. Структура сети Петри C(P, T, I, O)



Пример. Маркированная сеть Петри.





Сеть Петри дает преимущество в 2-х случаях:
1. При наличии параллельных процессов.
2. При наличии конвейерных процессов.

Процесс перемещения фишек, находящихся в позициях, из одних позиций в другие характеризует работу и управляют выполнением переходов сети. Таким образом, сеть Петри выполняется за счет активации переходов, удаляя при этом фишки из его входных позиций и образования новые перемещением в его выходные позиции. Переход запускается лишь в том случае, когда он разрешен.

Разрешенный переход - если каждая из его входных позиций имеет число фишек равное или больше числа дуг из позиции в переход. Кратные фишки необходимы для кратных входных дуг. Фишки во входной позиции, которые разрешают переход, называются его **разрешающими фишками**.

Переход запускается удалением всех разрешающих фишек из его входных позиций и последующим помещением в каждую из его выходных позиций по одной фишке для каждой дуги. Если какая-либо входная позиция перехода не обладает достаточным количеством фишек, то переход не разрешен и не может быть запущен.

Вопросы для повторения

1. Дайте определение сети Петри.
2. Как задаются сети Петри?
3. В каких случаях сети Петри имеют преимущества?

15.2. Свойства сетей Петри

Ограниченность (или *К-ограниченность)* имеет место (при заданной начальной маркировке μ_0), если число меток в любой позиции сети не может превысить значения *К*. При проектировании автоматизированных систем определение *К* позволяет обоснованно выбирать емкости накопителей.

Возможность неограниченного роста числа меток свидетельствует об опасности неограниченного роста длин очередей.

Безопасная позиция сети Петри - если число фишек в позиции никогда не превышает 1.

Безопасная сеть Петри - если безопасны все позиции сети.

Живучесть сети Петри - возможность срабатывания любого перехода при функционировании моделируемого объекта. С целью обеспечения живучести должно выполняться следующее условие: фишки, представляющие ресурсы, не должны создаваться или уничтожаться. Следовательно, общее число фишек в сети должно оставаться постоянным.

Свойство живучести сети Петри требует, чтобы число входов в каждый переход равнялось числу выходов |I(tj)| = |O(tj)|. Если это условие не будет выполняться, то запуск перехода изменил бы число фишек в сети.

При этом должно выполняться условие отсутствия тупиков, говорящее о том, что для любого перехода существует хотя-бы одна комбинация маркировок входных позиций, при которых сработает переход:

$$\forall t \in T, \exists \mu_g, \mu_n \in R(\mu_0) \Rightarrow \mu_g \mid -^t \mu_n .$$

Отсутствие свойства живучести либо означает избыточность аппаратуры в проектируемой системе, либо свидетельствует о возможности возникновения зацикливаний, тупиков, блокировок.

Правильная сеть Петри – сеть Петри, удовлетворяющая свойствам безопасности и живучести.

Вопросы для повторения

1. Что называют ограниченностью в сетях Петри?
2. Что называют безопасностью в сетях Петри?
3. Что называют живостью сетей Петри?

Литература

1. Аляев Ю.А. Тюрин С.Ф. Дискретная математика и математическая логика. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 368 с.

2. Амбарцумов Л.Г. Дискретная математика. Часть 1. Множества. Отображения. Отношения. 2-еизд., испр. – Казань, 2009. – 128 с.

3. Амбарцумов Л.Г. Теория графов и комбинаторика: Учеб. пособие. – Казань, 1992. – 92 с.

4. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. - Пер. с англ. — М. : Издатель- Издательский дом "Вильямс", 2004. — 960 с.

5. Белоусов А. И., Ткачёв С. Б. Дискретная математика. М.:Изд-воМГТУ им. Н.Э. Баумана. 2001. 744 с.

6. Горбатов В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. — М.: Наука. Физматлит, 2000.— 544с.

7. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. изд.3 - М.: Вузовская книга , 2000. - 200с.

8. Лавров И.А. Математическая логика: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / И.А. Лавров; под ред. Л.Л. Максимовой. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 240 с.

9. Макоха А. Н., Сахнюк П. А., Червяков Н. И. Дискретная математика: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 368 с.

10. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. - М.: Логос, 2000. - 240 с.

11. Плотников А.Д. Дискретная математика: учеб. пособие / А.Д. Плотников. – М.: Новое знание, 2005. – 288 с.

12. Серебряков А.В. Введение в теорию графов: Уч.пособие – Саратов, СГТУ, 2009.

13. Соболева Т.С. Дискретная математика: учебник для студ. вузов / Т. С.Соболева, А. В.Чечкин; под ред. А. В.Чечкина. — М.: Издательский центр «Академия», 2006. — 256 с.

14. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.

15. Таран Т.А. Основы дискретной математики.— К.: Просвіта, 2003,— 288 с.

16. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высш. шк., 2003. – 384 с.