УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

УРАВНЕНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

А. М. Мейрманов

Белгородский государственный университет, 308015 Белгород
E-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Рассматривается задача о неизотермическом совместном движении упругого пористого тела и жидкости, заполняющей поры, в случае, когда длительность физического процесса составляет доли секунды. На основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод осредненных уравнений (уравнений, не содержащих быстроосциллирующих коэффициентов). При различных комбинациях физических параметров задачи такие уравнения представляют собой систему, состоящую из анизотропных неизотермических уравнений Стокса для скорости жидкого компонента и уравнений неизотермической акустики для перемещений твердого компонента, или анизотропные неизотермические уравнения Стокса для односкоростного континуума.

Ключевые слова: неизотермические уравнения Стокса и Ламе, гидравлический разрыв, двухмасштабная сходимость, осреднение периодических структур.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе предлагается модель быстропротекающих неизотермических процессов в упругой деформируемой среде, перфорированной системой каналов и пор (упругие пористые среды), заполненных жидкостью или газом. Твердый компонент такой среды называется скелетом грунта, а область, занятая жидкостью, — поровым пространством.

В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, \qquad t' = \tau t, \qquad \boldsymbol{w}' = L\boldsymbol{w}, \qquad \theta' = \vartheta_* \frac{L}{\tau v_*}\,\theta$$

дифференциальные уравнения модели для малых отклонений безразмерных перемещений $\boldsymbol{w}$ и малых отклонений безразмерной температуры θ в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ при $t > 0$ имеют вид

$$\alpha_\tau \bar{\rho}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \boldsymbol{P} + \bar{\rho}\boldsymbol{F}; \tag{1}$$

$$\alpha_\tau \bar{c}_p\,\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\bar{\alpha}_\varkappa \nabla\theta) - \bar{\alpha}_\theta\,\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \boldsymbol{w}) + \Psi; \tag{2}$$

$$p_f + \bar{\chi}\alpha_p \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \tag{3}$$

где тензор напряжений сплошной среды

$$\boldsymbol{P} = \bar{\chi}\boldsymbol{P}^f + (1-\bar{\chi})\boldsymbol{P}^s$$

совпадает с тензором упругих напряжений

$$\boldsymbol{P}^s = \alpha_\lambda \boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{w}) + (\alpha_\eta \operatorname{div} \boldsymbol{w} - \alpha_{\theta s}\theta)\boldsymbol{I}$$

в твердом скелете ($\boldsymbol{I}$ — шаровой тензор) и с тензором вязких напряжений

$$\boldsymbol{P}^f = \alpha_\mu \boldsymbol{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (-p_f - \alpha_{\theta f}\theta)\boldsymbol{I}$$

в поровом пространстве,

$$\boldsymbol{D}(x, \boldsymbol{u}) = (1/2)(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\text{т}}),$$

$$\bar{\rho} = \bar{\chi}\rho_f + (1 - \bar{\chi})\rho_s, \qquad \bar{c}_p = \bar{\chi}c_{pf} + (1 - \bar{\chi})c_{ps},$$

$$\bar{\alpha}_\varkappa = \bar{\chi}\alpha_{\varkappa f} + (1 - \bar{\chi})\alpha_{\varkappa s}, \qquad \bar{\alpha}_\theta = \bar{\chi}\alpha_{\theta f} + (1 - \bar{\chi})\alpha_{\theta s},$$

ρ_f, ρ_s — средняя плотность жидкости и твердого скелета; c_{pf}, c_{ps} — коэффициент теплоемкости в жидкости и твердом скелете. Характеристическая функция $\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$ порового пространства $\Omega_f \subset \Omega$ считается известной.

Вывод уравнений (1)–(3) и описание всех безразмерных постоянных (все они строго положительны) содержатся в [1].

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями:

$$\boldsymbol{w}\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \theta\big|_{t=0} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega; \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w} = 0, \quad \theta = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

Математическая модель, описываемая уравнениями (1)–(3), содержит естественный малый параметр ε, который представляет собой отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области:

$$\varepsilon = l/L.$$

Поэтому вполне обоснованным является определение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения позволяют существенно упростить исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Однако даже при наличии малого параметра задача остается достаточно сложной, и для ее решения необходимы дополнительные упрощающие предположения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства.

Предположение 1. Пусть область Ω есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$; $1/\varepsilon$ — целое число, такое что Ω всегда содержит целое число элементарных ячеек Y^ε. Пусть Y_s — "твердая" часть ячейки Y, ее "жидкая" часть Y_f — открытое дополнение Y_s в Y, граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ между "жидким" и "твердым" компонентами представляет собой липшицеву поверхность.

Поровое пространство Ω_f^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твердый скелет Ω_s^ε — периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, а липшицева граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega_f^\varepsilon$ — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

Твердый скелет Ω_s^ε и поровое пространство Ω_f^ε являются связными множествами, а пересечение области Ω_f^ε с произвольной плоскостью $\{x_i = \text{const},\ 0 < x_i < 1,\ i = 1, 2, 3\}$ есть открытое (в топологии плоскости) множество. С учетом этих предположений

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon), \qquad \bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$

$$\bar{c}_p = c_p^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})c_{pf} + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))c_{ps},$$

$$\bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$

$$\bar{\alpha}_\varkappa = \alpha_\varkappa^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\alpha_{\varkappa f} + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\alpha_{\varkappa s},$$

$$\bar{\alpha}_\theta = \alpha_\theta^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\alpha_{\theta f} + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\alpha_{\theta s},$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ — характеристическая функция Y_f в Y, определяющая поровое пространство. В рассматриваемой модели функция $\chi(\boldsymbol{y})$ считается заданной.

Пусть приведенные ниже безразмерные параметры зависят от малого параметра задачи ε и существуют их конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu(\varepsilon)\equiv\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{2\mu}{\tau Lg\rho_0}=\mu_0,\qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\lambda(\varepsilon)\equiv\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{2\lambda}{Lg\rho_0}=\lambda_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\tau(\varepsilon)\equiv\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{L}{g\tau^2}=\tau_0,\qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_p(\varepsilon)=p_*,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\eta(\varepsilon)=\eta_0,\qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\varkappa f}(\varepsilon)=\varkappa_{0f},\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\varkappa s}(\varepsilon)=\varkappa_{0s},$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\theta f}(\varepsilon)=\beta_{0f},\qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\theta s}(\varepsilon)=\beta_{0s},\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2}=\lambda_1$$

(μ — вязкость жидкости (газа); λ — постоянная Ламе; τ — характерное время процесса; ρ_0 — плотность воды; g — ускорение свободного падения.

Если $\tau_0=\infty$, то перенормировкой перемещений и температуры

$$\boldsymbol{w}\to\alpha_\tau\boldsymbol{w},\qquad \theta\to\alpha_\tau\theta$$

задача сводится к аналогичной задаче, в которой

$$\alpha_\tau=1,\qquad \alpha_\mu=\frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0},\qquad \alpha_\lambda=\frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0}.$$

Отметим, что случай $\tau_0=\infty$ имеет место, например, при описании быстропротекающих процессов, таких как гидравлический разрыв нефтяного пласта, когда длительность процесса составляет доли секунды.

В случае изотермического движения наиболее полные результаты получены в [2, 3]. Неизотермическое движение рассматривалось в [4] при ограничениях $\tau_0<\infty$, $\mu_0<\infty$, $\lambda_0^{-1}<\infty$. В настоящей работе, являющейся продолжением исследований [2–4], рассматривается не изучавшийся ранее случай $\lambda_0=0$, в частности вариант

$$\tau_0=1,\qquad 0<\mu_0<\infty,\qquad \lambda_0=0.$$

Показано, что осредненными уравнениями точной модели (1)–(5) является анизотропная система неизотермических уравнений Стокса для жидкого компонента, связанная с уравнениями акустики для твердого компонента ($\lambda_1<\infty$), либо анизотропная система неизотермических уравнений Стокса для односкоростного континуума ($\lambda_1=\infty$).

Очевидно, что при решении реальных физических задач не предполагается наличие каких-либо предельных переходов, имеются только конкретные физические постоянные (плотность среды, вязкость жидкости, упругие постоянные твердого скелета и т. п.) и две переменные величины: характерный размер рассматриваемой области L и характерное время физического процесса τ. Меняя эти переменные величины в пределах области применимости математической модели, можно определить закономерности поведения безразмерных комплексов α_μ, α_τ, α_λ, …, которые позволят выбрать тот или иной предельный режим в точной модели (1)–(5).

Все необходимые вспомогательные утверждения и обозначения приведены в работе [2].

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как правило, уравнения (1), (2) рассматриваются в рамках теории распределений. К этим уравнениям добавляются краевые условия

$$[\boldsymbol{w}]=0,\qquad [\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}]=0,\qquad \boldsymbol{x}_0\in\Gamma^\varepsilon,\quad t\geqslant 0; \tag{1.1}$$

$$[\theta] = 0, \qquad [\alpha^{\varepsilon}_{\varkappa} \nabla\theta \cdot \boldsymbol{n}] = 0, \qquad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma^{\varepsilon}, \quad t \geqslant 0 \tag{1.2}$$

на границе Γ^{ε}, где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали к границе;

$$[\varphi](\boldsymbol{x}_0) = \varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0) - \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0),$$
$$\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_s}} \varphi(\boldsymbol{x}), \qquad \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_f}} \varphi(\boldsymbol{x}).$$

Условие (1.1) следует из определения класса искомых решений — решений (температура θ и перемещения $\boldsymbol{w}$), обладающих минимальными свойствами непрерывности. Первое условие в (1.2) есть следствие закона сохранения количества движения на сильных (контактных) разрывах, второе условие — следствие закона сохранения энергии.

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (1), (2) и краевых условий (1.1), (1.2). В данной работе целесообразно записывать их в виде интегральных тождеств.

Определение. Функции $(\boldsymbol{w}^{\varepsilon}, \theta^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}_f, p^{\varepsilon}_s)$ называются обобщенным решением задачи (1)–(4), если они удовлетворяют условиям регулярности

$$\nabla\boldsymbol{w}^{\varepsilon},\ \nabla\theta^{\varepsilon},\ p^{\varepsilon}_f,\ p^{\varepsilon}_s \in L^2(\Omega_T)$$

в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, граничным условиям (4), уравнениям

$$\frac{1}{\alpha_p}\, p^{\varepsilon}_f = -\chi^{\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{w}^{\varepsilon} + \frac{\chi^{\varepsilon}}{m}\, \beta^{\varepsilon}; \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{\alpha_\eta}\, p^{\varepsilon}_s = -(1-\chi^{\varepsilon}) \operatorname{div} \boldsymbol{w}^{\varepsilon} - \frac{1-\chi^{\varepsilon}}{1-m}\, \beta^{\varepsilon} \tag{1.4}$$

почти всюду в области Ω_T, интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T} \Big(\rho^{\varepsilon}\alpha_\tau \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - \chi^{\varepsilon}\alpha_\mu \boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}) : \boldsymbol{D}\Big(x, \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\Big) - \rho^{\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi} +$$
$$+ [(1-\chi^{\varepsilon})\alpha_\lambda \boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}) - (p^{\varepsilon}_f + p^{\varepsilon}_s + \alpha^{\varepsilon}_\theta \theta^{\varepsilon})\boldsymbol{I}] : \boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\Big)\, dx\, dt = 0 \tag{1.5}$$

для всех гладких вектор-функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$, таких что

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in S,\ t > 0, \qquad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, T) = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, T) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega,$$

и интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T} \Big((c^{\varepsilon}_p\alpha_\tau\theta^{\varepsilon} + \alpha^{\varepsilon}_\theta \operatorname{div}\boldsymbol{w}^{\varepsilon})\,\frac{\partial\xi}{\partial t} - \alpha^{\varepsilon}_{\varkappa}\nabla\theta^{\varepsilon}\cdot\nabla\xi + \Psi\xi\Big)\, dx\, dt = 0 \tag{1.6}$$

для всех гладких функций $\xi = \xi(\boldsymbol{x}, t)$, таких что

$$\xi(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in S,\ t > 0, \qquad \xi(\boldsymbol{x}, T) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega.$$

Введем новую искомую функцию p^{ε}_s, которую по аналогии с функцией p^{ε}_f будем называть давлением в твердом скелете. При этом уравнение (1.4) будем называть уравнением неразрывности в твердом компоненте. Нормирующее слагаемое

$$\beta^{\varepsilon} = \int\limits_{\Omega} \chi^{\varepsilon} \operatorname{div}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\, dx \quad \text{при} \quad p_* + \eta_0 = \infty, \qquad \beta^{\varepsilon} = 0 \quad \text{при} \quad p_* + \eta_0 < \infty$$

выбрано таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{\Omega} p_f^\varepsilon\,dx = \int\limits_{\Omega} p_s^\varepsilon\,dx = 0 \tag{1.7}$$

при $p_* + \eta_0 = \infty$. Такое увеличение числа искомых функций позволяет, во-первых, достаточно легко оценить давления, даже если $p_* = \infty$ (несжимаемая жидкая фаза) или $\eta_0 = \infty$ (несжимаемая твердая фаза), во-вторых, упростить вид осредненных уравнений.

В (1.5) через $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам:

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{A}) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ji}.$$

В дальнейшем будем считать, что выполнено

Предположение 2. Пусть: 1) $\Psi, \partial\Psi/\partial t, |\boldsymbol{F}|, |\partial\boldsymbol{F}/\partial t| \in L^2(\Omega_T)$; 2) безразмерные параметры удовлетворяют следующим ограничениям:

$$p_*^{-1}, \eta_0^{-1}, |\ln\mu_0|, \beta_{0f}, \beta_{0s}, |\ln\varkappa_{0f}|, |\ln\varkappa_{0s}| < \infty, \qquad \tau_0 = 1, \qquad \lambda_0 = 0.$$

Всюду ниже параметры модели могут принимать все разрешенные условиями теорем значения. Например, если $p_*^{-1} = 0$ (несжимаемая жидкость) или $\eta_0^{-1} = 0$ (несжимаемый твердый скелет), то во всех уравнениях слагаемые, содержащие эти величины, исчезают.

Отметим также, что в данной работе не рассматриваются случаи $p_* = 0$ и $\eta_0 = 0$, поскольку они не представляют интереса ни с физической, ни с математической точки зрения.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *При всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0,T]$ существует единственное обобщенное решение задачи* (1)–(5) *и*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\Big\|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\Big\|_{2,\Omega} + \Big\|\chi^\varepsilon\nabla\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega} + \sqrt{\alpha_\lambda}\,\Big\|(1-\chi^\varepsilon)\nabla\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega}\Big) \leqslant C_0; \tag{1.8}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big(\|\theta^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega} + \|\nabla\theta^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega}\big) \leqslant C_0; \tag{1.9}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big(\||p_f^\varepsilon| + |p_s^\varepsilon|\|_{2,\Omega}\big) \leqslant C_0, \tag{1.10}$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε.

Теорема 2. *Функции $\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ допускают продолжение $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ из области $\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)$ на область Ω_T, так что последовательность $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ сходится сильно в пространстве $L^2(\Omega_T)$ и слабо в пространстве $L^2((0,T); W_2^1(\Omega))$ к функции $\boldsymbol{v}$. Аналогично последовательность $\{\theta^\varepsilon\}$ сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2((0,T); \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ к функции θ. В то же время последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}^s$, p_f, p_s соответственно.*

I. *Если $\lambda_1 = \infty$, то $\partial\boldsymbol{w}^s/\partial t = (1-m)\boldsymbol{v} = (1-m)\partial\boldsymbol{w}/\partial t$ и слабые и сильные пределы p_f, p_s, θ, $\boldsymbol{v}$ удовлетворяют в Ω_T следующей начально-краевой задаче:*

$$\hat\rho\,\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla(p_f + p_s + \hat\beta_0\theta) - \hat\rho\boldsymbol{F} =$$

$$= \operatorname{div}\Big(\mu_0\boldsymbol{A}_0^f : \boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{B}_0^f p_s + \boldsymbol{B}_1^f\theta + \boldsymbol{B}_3^f\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \int\limits_0^t \boldsymbol{B}_2^f(t-\tau)\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\Big); \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \boldsymbol{C}_0^f : \boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{v}) + a_0^f p_s + a_1^f \theta +$$

$$+ (a_3^f + m)\operatorname{div}\boldsymbol{v} + a_4^f \langle\theta\rangle_\Omega + \int\limits_0^t a_2^f(t-\tau)\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\eta_0}\frac{\partial p_s}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0;$$

$$\hat{c}_p\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\beta_{0f}}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0}\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\beta_{0f}-\beta_{0s})(a_3^f + a_4^f)\Big\langle\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big\rangle_\Omega = \operatorname{div}(\boldsymbol{B}^\theta\cdot\nabla\theta) + \Psi. \qquad (1.12)$$

Здесь $m = \int\limits_Y \chi\,dy$ *— пористость;* $\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s$*;* $\hat{\beta}_0 = m\beta_{0f} + (1-m)\beta_{0s}$*;* $\hat{c}_p = mc_{pf} + (1-m)c_{ps}$*; симметричный строго положительно-определенный тензор четвертого ранга* $\boldsymbol{A}_0^f$*, матрицы* $\boldsymbol{C}_0^f$*,* $\boldsymbol{B}_0^f$*,* $\boldsymbol{B}_1^f$*,* $\boldsymbol{B}_3^f$*,* $\boldsymbol{B}_2^f(t)$*, симметричная строго положительно-определенная матрица* $\boldsymbol{B}^\theta$ *и скалярные величины* a_0^f*,* a_1^f*,* a_3^f*,* a_4^f*,* $a_2^f(t)$ *определяются ниже.*

Дифференциальные уравнения (1.11), (1.12) *замыкаются однородными начальными и граничными условиями*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = 0, \qquad \theta(\boldsymbol{x},0) = p_f(\boldsymbol{x},0) = p_s(\boldsymbol{x},0) = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad \theta(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in S, \quad t>0.\end{gathered} \qquad (1.13)$$

II. *Если* $\lambda_1 < \infty$*, то слабые и сильные пределы* $\boldsymbol{w}^s$*,* p_f*,* p_s*,* θ*,* $\boldsymbol{v}$ *удовлетворяют в области* Ω_T *начально-краевой задаче, которая включает анизотропную неизотермическую систему уравнений Стокса*

$$\rho_f m\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho_s\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^s}{\partial t^2} + \nabla(p_f + p_s + \hat{\beta}_0\theta) - \hat{\rho}\boldsymbol{F} =$$

$$= \operatorname{div}\Big(\mu_0\boldsymbol{A}_0^f : \boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{B}_0^f p_s + \boldsymbol{B}_1^f\theta + \boldsymbol{B}_3^f\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \int\limits_0^t \boldsymbol{B}_2^f(t-\tau)\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\Big),$$

$$\frac{1}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \boldsymbol{C}_0^f : \boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{v}) + a_0^f p_s + a_1^f \theta +$$

$$+ (a_3^f + m)\operatorname{div}\boldsymbol{v} + a_4^f \langle\theta\rangle_\Omega + \int\limits_0^t a_2^f(t-\tau)\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\eta_0}\frac{\partial p_s}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,$$

$$\hat{c}_p\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\beta_{0f}}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0}\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\beta_{0f}-\beta_{0s})(a_3^f + a_4^f)\Big\langle\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big\rangle_\Omega = \operatorname{div}(\boldsymbol{B}^\theta\cdot\nabla\theta) + \Psi$$

для скорости, давления и температуры в жидком компоненте, связанную с уравнением неразрывности

$$\frac{1}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\eta_0}\frac{\partial p_s}{\partial t} + \operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{w}^s}{\partial t} + m\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

соотношением

$$
\frac{\partial \boldsymbol{w}^s}{\partial t} = (1-m)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) + \int\limits_0^t \boldsymbol{B}_1^s(t-\tau)\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau,
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{1-m}\nabla p_s(\boldsymbol{x},t) - \beta_{0s}\nabla\theta + \rho_s\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) - \rho_s\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.14}
$$

в случае $\lambda_1 > 0$ *или законом сохранения количества движения в виде*

$$
\rho_s\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^s}{\partial t^2} = \rho_s\boldsymbol{B}_2^s\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + ((1-m)I - \boldsymbol{B}_2^s)\Big(-\frac{1}{1-m}\nabla p_s - \beta_{0s}\nabla\theta + \rho_s\boldsymbol{F}\Big) \tag{1.15}
$$

в случае $\lambda_1 = 0$ *для перемещений твердого компонента. Задача замыкается граничными и начальными условиями* (1.13) *для осредненной температуры всей среды и скорости* $\boldsymbol{v}$ *жидкого компонента, а также однородными начальными условиями и краевым условием*

$$
\boldsymbol{w}^s(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad (\boldsymbol{x},t)\in S, \quad t>0 \tag{1.16}
$$

для перемещений $\boldsymbol{w}^s$ *твердого компонента. В уравнениях* (1.14)–(1.16) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ *— единичная нормаль к границе* S *в точке* $\boldsymbol{x}\in S$*; матрицы* $\boldsymbol{B}_1^s(t)$, $\boldsymbol{B}_2^s$ *определяются ниже.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для вывода оценок (1.8) и (1.9) рассмотрим интегральное тождество

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big[\alpha_\tau\int\limits_\Omega\Big(\rho^\varepsilon\Big(\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big)^2 + c_p^\varepsilon\Big(\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\Big)^2\Big)dx + \alpha_\lambda\int\limits_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big):\boldsymbol{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)dx\,+ \\
+\,\alpha_p\int\limits_\Omega\chi^\varepsilon\Big(\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)^2dx + \alpha_\eta\int\limits_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\Big(\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)^2dx\Big] + \int\limits_\Omega\alpha_\varkappa^\varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2dx\,+ \\
+\alpha_\mu\int\limits_\Omega\chi^\varepsilon\boldsymbol{D}\Big(x,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big):\boldsymbol{D}\Big(x,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big)dx = \int\limits_\Omega\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\,dx\,+ \\
+\,\frac{\partial\beta^\varepsilon}{\partial t}\Big(\frac{\alpha_p}{m}\int\limits_\Omega\chi^\varepsilon\operatorname{div}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\,dx + \frac{\alpha_\eta}{1-m}\int\limits_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\operatorname{div}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\,dx\Big),
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

которое получается после дифференцирования по времени уравнений для $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ и θ^ε, умножения первого уравнения на $\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t^2$, второго — на $\partial\theta^\varepsilon/\partial t$, интегрирования их по частям и суммирования.

Если $p_* + \eta_0 < \infty$ ($\beta^\varepsilon = 0$), то из тождества (2.1) следует оценка

$$
\begin{aligned}
\max_{0<t<T}\Big(\Big\|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\Big\|_{2,\Omega} + \sqrt{\alpha_\lambda}\,\Big\|\nabla\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega_s^\varepsilon} + \sqrt{\alpha_\eta}\,\Big\|\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}\,+ \\
+\,\sqrt{\alpha_p}\,\Big\|\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega_f^\varepsilon} + \Big\|\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega}\Big) + \Big\|\Big|\nabla\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\Big| + \Big|\chi^\varepsilon\nabla\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big|\Big\|_{2,\Omega_T} \leqslant C_0,
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

где C_0 не зависит от ε. Оценки (1.8) и (1.9) следуют из (2.2), оценка (1.10) для давлений p_f^ε и p_s^ε — из уравнений неразрывности (1.3), (1.4) и оценок (2.2).

Пусть $p_* + \eta_0 = \infty$. Тогда оценки (1.8) и (1.9) следуют из тождества (2.1) при использовании неравенств

$$
\frac{1}{m}\Big(\int\limits_\Omega\chi^\varepsilon\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\,dx\Big)^2 \leqslant \int\limits_\Omega\chi^\varepsilon\Big(\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)^2dx,
$$

$$\frac{1}{1-m}\Big(\int\limits_{\Omega}(1-\chi^{\varepsilon})\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\,dx\Big)^2 \leqslant \int\limits_{\Omega}(1-\chi^{\varepsilon})\Big(\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)^2\,dx.$$

Оценка (1.10) для суммы давлений $p_f^{\varepsilon}+p_s^{\varepsilon}$ следует из основного интегрального тождества (1.5) и оценок (1.8) и (1.9) как оценка соответствующего функционала в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Действительно, из тождества (1.5), записанного в виде

$$\int\limits_{\Omega}(p_f^{\varepsilon}+p_s^{\varepsilon})\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}\,dx = \int\limits_{\Omega}\Big[\rho^{\varepsilon}\Big(\alpha_{\tau}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}-\boldsymbol{F}\Big)\cdot\boldsymbol{\psi}+\Big(\chi^{\varepsilon}\alpha_{\mu}\boldsymbol{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)+$$

$$+(1-\chi^{\varepsilon})\alpha_{\lambda}\boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})-\alpha_{\theta}^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\boldsymbol{I}\Big):\boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{\psi})\Big]\,dx,$$

и оценок (1.8) и (1.9) следует, что

$$\Big|\int_{\Omega}(p_f^{\varepsilon}+p_s^{\varepsilon})\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}\,dx\Big| \leqslant C_0\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\psi}(t)\|_{W_2^1(\Omega)}. \qquad (2.3)$$

Выбирая $\boldsymbol{\psi}$ таким образом, чтобы выполнялось условие $p_f^{\varepsilon}+p_s^{\varepsilon}\equiv q=\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}$, получим необходимую оценку для суммы давлений $p_f^{\varepsilon}+p_s^{\varepsilon}$. Такой выбор возможен (см. [5]), если положить

$$\boldsymbol{\psi}=\nabla\varphi+\boldsymbol{\psi}_0,$$

где

$$\Delta\varphi=q,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\qquad \varphi=0,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega; \qquad (2.4)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_0=0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\qquad \boldsymbol{\psi}_0=-\nabla\varphi,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega. \qquad (2.5)$$

Действительно, из оценки (2.3) следует, что

$$\int\limits_{\Omega}q^2\,dx\leqslant C_0\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\psi}(t)\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Продолжая нечетным образом решение задачи (2.4) через границу области Ω, получим

$$\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega),\qquad \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla\varphi(t)\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|q(t)\|_{\Omega}.$$

Будем искать решение $\boldsymbol{\psi}_0$ задачи (2.5) как решение системы уравнений Стокса

$$\Delta\boldsymbol{\psi}_0+\nabla p=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_0=0,\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega,$$

удовлетворяющее неоднородному краевому условию

$$\boldsymbol{\psi}_0=-\nabla\varphi,\qquad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega.$$

Последняя задача имеет единственное решение, такое что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{\psi}_0(t)\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla\varphi(t)\|_{W_2^1(\Omega)},$$

если и только если

$$\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\nabla\varphi)\,dx\equiv\int\limits_{\Omega}\Delta\varphi\,dx=\int\limits_{\Omega}q\,dx=0.$$

Легко заметить, что это условие следует из условий (1.7). Таким образом, с учетом всех оценок получаем искомую оценку, но только для суммы $p_f^{\varepsilon}+p_s^{\varepsilon}$. Поскольку произведение этих функций равно нулю, этого достаточно для оценки каждого слагаемого.

Оценки (1.8)–(1.10) гарантируют существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(4). Для доказательства этого достаточно использовать метод Галеркина, рассмотрев в качестве базового пространства пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а в качестве базиса — любой базис, ортонормированный в скалярном произведении пространства $L^2(\Omega)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

3.1. Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей перемещений и давлений. В силу теоремы 1 последовательности $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$ и $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ равномерно (по параметру ε) ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Следовательно, существует подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и функции p_f, p_s, $\boldsymbol{w}$, такие что

$$p_f^\varepsilon \to p_f, \qquad p_s^\varepsilon \to p_s, \qquad \boldsymbol{w}^\varepsilon \to \boldsymbol{w}$$

слабо в $L^2(\Omega_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Аналогично в силу ограниченности последовательности $\{\theta^\varepsilon\}$ в $L^2\big((0,T);W_2^1(\Omega)\big)$ существуют подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и функция $\theta \in L^2((0,T);\mathring{W}_2^1(\Omega))$, такие что $\theta^\varepsilon \to \theta$ слабо в $L^2((0,T);\mathring{W}_2^1(\Omega))$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Переобозначая, если необходимо, индексы, будем считать, что сходятся сами последовательности. Заметим также, что

$$(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda D(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon) \to 0$$

сильно в $L^2(\Omega_T)$, а последовательность $\{\operatorname{div}\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ сходится слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функции $\operatorname{div}\boldsymbol{w}$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Более того, в силу леммы о продолжении (см. [2, 6, 7]) существуют функции

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon \in L^\infty((0,T);W_2^1(\Omega)),$$

такие что $\boldsymbol{v}^\varepsilon = \partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ в $\Omega_f \times (0,T)$, $v^\varepsilon = 0$ на части S_f^ε границы S и

$$\Big\|\frac{\partial\boldsymbol{v}^\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{2,\Omega_T} + \Big\|\nabla\frac{\partial\boldsymbol{v}^\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{2,\Omega_T} \leqslant C_0,$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big(\|\boldsymbol{v}^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega} + \|\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega}\big) \leqslant C_0$$

(постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε).

Лемма 1. *Существуют подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и функция $\boldsymbol{v} \in L^\infty((0,T);\mathring{W}_2^1(\Omega))$, такие что $\boldsymbol{v}^\varepsilon(\,\cdot\,,t) \to \boldsymbol{v}(\,\cdot\,,t)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon \searrow 0$ для всех $t \in [0,T]$.*

Доказательство леммы достаточно стандартное.

Из теоремы Нгуетсенга (см. [2, 8]) следует, что существуют однопериодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $P_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $P_s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, такие что последовательности $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$, $\{\nabla\theta^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно к функциям $P_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $P_s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\nabla\theta + \nabla_y\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\nabla\boldsymbol{v} + \nabla_y\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ соответственно.

3.2. Микро- и макроскопические уравнения I. Справедливы следующие леммы.

Лемма 2. *Для всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и $\boldsymbol{y} \in Y$ слабые двухмасштабные пределы последовательностей $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ удовлетворяют соотношениям*

$$P_s = p_s\frac{1-\chi}{1-m}, \qquad P_f = \chi P_f; \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} + m\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \langle\operatorname{div}_y\boldsymbol{V}\rangle_{Y_f} = \frac{\partial\beta}{\partial t}; \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{p_*}\frac{\partial P_f}{\partial t} + \chi(\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \operatorname{div}_y\boldsymbol{V}) = \frac{\chi}{m}\frac{\partial\beta}{\partial t}; \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{p_*}p_f + \frac{1}{\eta_0}p_s + \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0; \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=0, \qquad \boldsymbol{x}\in S; \tag{3.5}$$

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{W}=0; \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}=\chi\boldsymbol{v}+(1-\chi)\,\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}, \tag{3.7}$$

где $\partial\beta/\partial t=\langle\langle\operatorname{div}_y \boldsymbol{V}\rangle_{Y_f}\rangle_\Omega$, *если* $p_*+\eta_0=\infty$, *и* $\beta=0$, *если* $p_*+\eta_0<\infty$; $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ *— единичный вектор нормали к поверхности* S *в точке* $\boldsymbol{x}\in S$.

Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующей леммы в [2].

Следствие. Пусть $p_*+\eta_0=\infty$. Тогда функции p_f, p_s удовлетворяют равенствам

$$\langle p_f\rangle_\Omega=\langle p_s\rangle_\Omega=0.$$

Лемма 3. *При всех* $(\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T$ *и* $y\in Y$ *выполняется соотношение*

$$\operatorname{div}_y\Big[\mu_0\chi\big(\boldsymbol{D}(y,\boldsymbol{V})+\boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{v})\big)-\Big(\chi P_f+\beta_0(\boldsymbol{y})\theta+\frac{1-\chi}{1-m}\,p_s\Big)\boldsymbol{I}\Big]=0, \tag{3.8}$$

где $\beta_0(\boldsymbol{y})=\beta_{0f}\chi(\boldsymbol{y})+\beta_{0s}(1-\chi(\boldsymbol{y}))$.

Доказательство. Подставляя в интегральное тождество (1.5) пробную функцию вида $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon=\varepsilon\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ — произвольная одноперiодическая по $\boldsymbol{y}$ функция, исчезающая на границе S, и переходя к пределу при $\varepsilon\searrow 0$, получим искомое микроскопическое уравнение (3.8) на ячейке Y.

Лемма 4. *Пусть* $\hat\rho=m\rho_f+(1-m)\rho_s$, $\hat\beta_0=m\beta_{0f}+(1-m)\beta_{0s}$. *Тогда функции* $\boldsymbol{w}^s=\langle\boldsymbol{W}\rangle_{Y_s}$, $\boldsymbol{v}$, p_f, p_s *в области* Ω_T *удовлетворяют системе макроскопических уравнений*

$$\rho_f m\,\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\rho_s\,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^s}{\partial t^2}-\hat\rho\boldsymbol{F}=\operatorname{div}\big[\mu_0(m\boldsymbol{D}(x,\boldsymbol{v})+\langle\boldsymbol{D}(y,\boldsymbol{V})\rangle_{Y_f})-(p_f+p_s+\hat\beta_0\theta)\boldsymbol{I}\big] \tag{3.9}$$

и однородным начальным условиям

$$\boldsymbol{w}^s(\boldsymbol{x},0)=0, \qquad \Big(\rho_f m\boldsymbol{v}+\rho_s\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^s}{\partial t}\Big)(\boldsymbol{x},0)=0, \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega.$$

Доказательство. Уравнения (3.9) и соответствующие начальные условия есть результат предельного перехода в тождестве (1.5), если в качестве пробных функций выбрать функции, не зависящие от "быстрой" переменной $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}/\varepsilon$.

3.3. Микро- и макроскопические уравнения II. Справедливы следующие леммы.

Лемма 5. *Если* $\lambda_1=\infty$, *то слабые пределы последовательностей* $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ *и* $\{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\}$ *совпадают:*

$$\boldsymbol{v}=\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}=\frac{1}{1-m}\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^s}{\partial t}.$$

Доказательство. Пусть $\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ — произвольная гладкая скалярная функция, периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$. Последовательность $\{\sigma^\varepsilon_{ij}\}$, где

$$\sigma^\varepsilon_{ij}=\int\limits_\Omega\sqrt{\alpha_\lambda}\,\frac{\partial w^\varepsilon_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)\,dx, \qquad \boldsymbol{w}^\varepsilon=(w^\varepsilon_1,w^\varepsilon_2,w^\varepsilon_3),$$

ограничена равномерно по параметру ε. Следовательно,

$$\int\limits_\Omega\varepsilon\,\frac{\partial w^\varepsilon_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)\,dx=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha_\lambda}}\,\sigma^\varepsilon_{ij}\to 0$$

при $\varepsilon\searrow 0$, что эквивалентно равенству

$$\int\limits_\Omega\int\limits_Y W_i(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,dx\,dy=0, \qquad \boldsymbol{W}=(W_1,W_2,W_3)$$

или $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$. В силу последнего соотношения и равенства

$$\chi^\varepsilon\Big(\boldsymbol{v}^\varepsilon - \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) = 0$$

предел $\partial \boldsymbol{w}/\partial t$ последовательности $\{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\}$ совпадает с пределом $\boldsymbol{v}$ последовательности $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$.

Лемма 6. *Пусть $\lambda_1 < \infty$. Тогда слабые двухмасштабные пределы p_s и $\boldsymbol{W}$ в области Y_s удовлетворяют микроскопическим уравнениям*

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2} = \lambda_1 \Delta_y \boldsymbol{W} - \nabla_y R + \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{y} \in Y_s; \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} = \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{y} \in \gamma \tag{3.11}$$

в случае $\lambda_1 > 0$ и микроскопическим уравнениям

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2} = -\nabla_y R + \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{y} \in Y_s; \tag{3.12}$$

$$\Big(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} - \boldsymbol{v}\Big) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{y} \in \gamma \tag{3.13}$$

в случае $\lambda_1 = 0$.

В (3.10), (3.12), (3.13)

$$\boldsymbol{z} = -\frac{1}{1-m}\nabla p_s - \beta_{0s}\nabla\theta + \rho_s \boldsymbol{F},$$

$\boldsymbol{n}$ *— единичная нормаль к границе γ.*

Уравнения (3.10), (3.12) *дополняются однородными начальными условиями*

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y},0) = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0) = 0, \qquad \boldsymbol{y} \in Y_s.$$

Доказательство. При $\varepsilon \searrow 0$ дифференциальные уравнения (3.10), (3.12) и соответствующие начальные условия следуют из интегрального тождества (1.5) с пробными функциями вида $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}(x\varepsilon^{-1})h(\boldsymbol{x},t)$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — соленоидальная финитная в области Y_s функция.

Краевое условие (3.11) есть следствие двухмасштабной сходимости последовательности $\{\sqrt{\alpha_\lambda}\,\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ к функции $\sqrt{\lambda_1}\,\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$. В силу этой сходимости функция $\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ является интегрируемой в $L^2(Y)$. Краевое условие (3.13) следует из уравнений (3.4), (3.5).

Лемма 7. *При всех $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega_T$ и $y \in Y$ сильные двухмасштабные пределы θ и Θ удовлетворяют микроскопическому уравнению*

$$\operatorname{div}_y[\tilde{\varkappa}_0(\boldsymbol{y})(\nabla\theta + \nabla_y\Theta)] = 0, \tag{3.14}$$

где $\tilde{\varkappa}_0(\boldsymbol{y}) = \chi(\boldsymbol{y})\varkappa_{0f} + (1-\chi(\boldsymbol{y}))\varkappa_{0s}$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.

Лемма 8. *При всех $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega_T$ слабые и сильные пределы θ, p_f, p_s удовлетворяют макроскопическому уравнению теплопроводности*

$$\hat{c}_p \frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\beta_{0f}}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0}\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\beta_{0f} - \beta_{0s})\frac{\partial\beta}{\partial t} = \operatorname{div}(\hat{\varkappa}_0\nabla\theta + \langle\tilde{\varkappa}_0\nabla_y\Theta\rangle_Y) + \Psi, \tag{3.15}$$

где $\hat{\varkappa}_0 = \langle\tilde{\varkappa}_0\rangle_Y$; $\hat{c}_p = mc_{pf} + (1-m)c_{ps}$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 4, если предварительно в тождестве (1.6) слагаемое $\alpha_\theta^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon$ выразить через давления, используя уравнения неразрывности (1.3) и (1.4).

3.4. Осредненные уравнения I. Выведем осредненные уравнения для жидкого компонента.

Лемма 9. *Если* $\lambda_1 = \infty$, *то* $\partial \boldsymbol{w}/\partial t = \boldsymbol{v}$ *и сильные и слабые пределы* $\boldsymbol{v}$, p_f, p_s *в области* Ω_T *удовлетворяют системе осредненных дифференциальных уравнений*

$$\hat\rho \,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla(p_f + p_s + \hat\beta_0\theta) - \hat\rho \boldsymbol{F} =$$

$$= \operatorname{div}\Big(\mu_0 \boldsymbol{A}_0^f : \boldsymbol{D}(x, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{B}_0^f p_s + \boldsymbol{B}_1^f \theta + \boldsymbol{B}_3^f \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \int\limits_0^t \boldsymbol{B}_2^f(t-\tau) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau\Big); \qquad (3.16)$$

$$\frac{1}{p_*}\,\frac{\partial p_f}{\partial t} + \boldsymbol{C}_0^f : \boldsymbol{D}(x, \boldsymbol{v}) + a_0^f p_s + a_1^f \theta +$$

$$+ (a_3^f + m) \operatorname{div} \boldsymbol{v} + a_4^f \langle \theta \rangle_\Omega + \int\limits_0^t a_2^f(t-\tau) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau = 0; \qquad (3.17)$$

$$\frac{1}{p_*}\,\frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\eta_0}\,\frac{\partial p_s}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad (3.18)$$

где симметричный и строго положительно-определенный тензор четвертого ранга $\boldsymbol{A}_0^f$, *матрицы* $\boldsymbol{C}_0^f$, $\boldsymbol{B}_0^f$, $\boldsymbol{B}_1^f$, $\boldsymbol{B}_3^f$, $\boldsymbol{B}_2^f(t)$ *и скалярные величины* a_0^f, a_1^f, a_3^f, a_4^f, $a_2^f(t)$ *определены ниже.*

Дифференциальные уравнения (3.16) *дополняются однородными начальными и граничными условиями*

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad t > 0. \qquad (3.19)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу леммы 5 $\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{w}/\partial t$.

Осредненные уравнения (3.16) следуют из макроскопических уравнений (3.9) после подстановки в них выражения

$$\mu_0 \langle \boldsymbol{D}(y, \boldsymbol{V}) \rangle_{Y_f} = \mu_0 \boldsymbol{A}_1^f : \boldsymbol{D}(x, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{B}_0^f p_s + \boldsymbol{B}_1^f \theta +$$

$$+ \boldsymbol{B}_3^f \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \int\limits_0^t \boldsymbol{B}_2^f(t-\tau) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau + \boldsymbol{A}(t).$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (3.6) и (3.8) на элементарной ячейке Y_f. Действительно, если $p_* + \eta_0 < \infty$, то $\beta = 0$. Тогда, полагая

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i,j=1}^3 \boldsymbol{V}^{(ij)}(\boldsymbol{y}) D_{ij} + \boldsymbol{V}^{(0)}(\boldsymbol{y}) p_s + \boldsymbol{V}^{(1)}(\boldsymbol{y})\theta + \int\limits_0^t \boldsymbol{V}^{(2)}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau,$$

$$P_f = \sum_{i,j=1}^3 P^{ij}(\boldsymbol{y}) D_{ij} + P^0(\boldsymbol{y}) p_s + P^1(\boldsymbol{y})\theta + \int\limits_0^t P^{(2)}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau,$$

где

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\Big),$$

получим следующие периодические краевые задачи в области Y:

$$\operatorname{div}_y[\chi\boldsymbol{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)})-\chi P^{(ij)}\boldsymbol{I}+\chi J^{ij}]=0,\qquad \chi\operatorname{div}_y\boldsymbol{V}^{(ij)}=0,$$

$$\operatorname{div}_y\Big[\mu_0\chi\boldsymbol{D}(y,\boldsymbol{V}^{(0)})-\Big(\chi P^{(0)}+\frac{1-\chi}{1-m}\Big)\boldsymbol{I}\Big]=0,\qquad \chi\operatorname{div}_y\boldsymbol{V}^{(0)}=0, \tag{3.20}$$

$$\operatorname{div}_y[\mu_0\chi\boldsymbol{D}(y,\boldsymbol{V}^{(1)})-(\beta_0(\boldsymbol{y})+\chi P^{(1)})\boldsymbol{I}]=0,\qquad \chi\operatorname{div}_y\boldsymbol{V}^{(1)}=0;$$

$$\operatorname{div}_y[\mu_0\chi\boldsymbol{D}(y,\boldsymbol{V}^{(2)})-\chi P^{(2)}\boldsymbol{I}]=0;$$

$$\frac{1}{p_*}\frac{\partial P^{(2)}}{\partial t}+\chi\operatorname{div}_y\boldsymbol{V}^{(2)}=0,\qquad \frac{1}{p_*}P^{(2)}(\boldsymbol{y},0)=-\chi(\boldsymbol{y}). \tag{3.21}$$

Если $p_*=\infty$, то $\beta\neq 0$. Тогда, полагая

$$\boldsymbol{V}=\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{V}^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}+\boldsymbol{V}^{(0)}(\boldsymbol{y})p_s+\boldsymbol{V}^{(1)}(\boldsymbol{y})(\theta-\langle\theta\rangle_\Omega)+\boldsymbol{V}^{(3)}(\boldsymbol{y})\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{V}^{(4)}(\boldsymbol{y})\langle\theta\rangle_\Omega,$$

$$P_f=\sum_{i,j=1}^{3}P^{ij}(\boldsymbol{y})D_{ij}+P^{0}(\boldsymbol{y})p_s+P^{1}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y})(\theta-\langle\theta\rangle_\Omega)+P^{(3)}(\boldsymbol{y})\operatorname{div}\boldsymbol{v}+P^{(4)}(\boldsymbol{y})\langle\theta\rangle_\Omega,$$

получим следующие краевые задачи для определения функций $\{\boldsymbol{V}^{(3)},\,P^{(3)}\}$ и $\{\boldsymbol{V}^{(4)},\,P^{(4)}\}$:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}_y[\mu_0\chi\boldsymbol{D}(y,\boldsymbol{V}^{(3)})-\chi P^{(3)}\boldsymbol{I}]=0,\quad \chi(\operatorname{div}_y\boldsymbol{V}^{(3)}+1)=0,\\ \operatorname{div}_y[\mu_0\chi\boldsymbol{D}(y,\boldsymbol{V}^{(4)})-(\chi P^{(4)}+\beta_0(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{I}]=0,\quad \chi\operatorname{div}_y\boldsymbol{V}^{(4)}=(\chi/m)\langle\chi\operatorname{div}_y\boldsymbol{V}^{(4)}\rangle_Y.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Наконец, если $p_*<\infty$ и $\eta_0=\infty$, то

$$\boldsymbol{V}=\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{V}^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}+\boldsymbol{V}^{(0)}(\boldsymbol{y})p_s+\boldsymbol{V}^{(1)}(\boldsymbol{y})(\theta-\langle\theta\rangle_\Omega)+$$
$$+\int_0^t\boldsymbol{V}^{(2)}(\boldsymbol{y},t-\tau)\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau+\boldsymbol{V}^{(4)}(\boldsymbol{y})\langle\theta\rangle_\Omega,$$

$$P_f=\sum_{i,j=1}^{3}P^{ij}(\boldsymbol{y})D_{ij}+P^{0}(\boldsymbol{y})p_s+P^{1}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y})(\theta-\langle\theta\rangle_\Omega)+$$
$$+\int_0^t P^{(2)}(\boldsymbol{y},t-\tau)\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau+P^{(4)}(\boldsymbol{y})\langle\theta\rangle_\Omega.$$

Предположения о геометрии элементарной “жидкой” ячейки Y_f гарантируют существование единственного (с точностью до постоянного вектора) решения задач (3.20)–(3.22). С целью исключения произвола потребуем выполнения равенств

$$\langle\boldsymbol{V}^{(ij)}\rangle_{Y_f}=\langle\boldsymbol{V}^{(k)}\rangle_{Y_f}=\langle P^{(4)}\rangle_{Y_f}=0,\qquad i,j=1,2,3,\quad k=0,1,2,3,4.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{A}_0^f = m\boldsymbol{J} + \boldsymbol{A}_1^f, \qquad \boldsymbol{A}_1^f = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \boldsymbol{D}(y, \boldsymbol{V}^{(ij)})\rangle_{Y_f} \otimes \boldsymbol{J}^{ij},$$

$$\boldsymbol{B}_i^f = \tilde{\boldsymbol{B}}_i^f, \quad i = 0,1,2, \qquad \boldsymbol{B}_3^f = 0 \quad \text{при} \quad p_* < \infty,$$

$$\boldsymbol{B}_i^f = \tilde{\boldsymbol{B}}_i^f, \quad i = 0,1,3, \qquad \boldsymbol{B}_2^f = 0 \quad \text{при} \quad p_* = \infty,$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_i^f = \mu_0 \langle \boldsymbol{D}(y, \boldsymbol{V}^{(i)})\rangle_{Y_f}, \qquad i = 0,1,2,3.$$

Симметричность тензора $\boldsymbol{A}_0^f$ доказана в [2].

Уравнения (3.17) и (3.18) для давлений следуют из уравнений (3.2) и (3.4) и равенства

$$\langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{V}\rangle_{Y_f} = \boldsymbol{C}_0^f : \boldsymbol{D}(x, \boldsymbol{v}) + a_0^f p_s + a_1^f \theta + a_3^f \operatorname{div} \boldsymbol{v} + {}$$
$$+ a_4^f \langle \theta\rangle_\Omega + \int_0^t a_2^f (t-\tau) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau,$$

где

$$\boldsymbol{C}_0^f = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{V}^{(ij)}\rangle_{Y_f} \boldsymbol{J}^{ij},$$

$$a_i^f = \tilde{a}_i^f, \quad i = 0,1,2, \qquad a_j^f = 0, \quad j = 3,4 \quad \text{при} \quad p_* + \eta_0 < \infty,$$

$$a_i^f = \tilde{a}_i^f, \quad i = 0,1,3,4, \qquad a_2^f = 0 \quad \text{при} \quad p_* = \infty,$$

$$a_i^f = \tilde{a}_i^f, \quad i = 0,1,2,4, \qquad a_3^f = 0 \quad \text{при} \quad p_* < \infty, \quad \eta_0 = \infty,$$

$$\tilde{a}_i^f = \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{V}^{(i)}\rangle_{Y_f}, \quad i = 0,1,2,3, \qquad \tilde{a}_4^f = \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{V}^{(4)} - \operatorname{div}_y \boldsymbol{V}^{(1)}\rangle_{Y_f}.$$

3.5. Осредненные уравнения II. Доказательство теоремы 2 завершим выводом осредненных уравнений для перемещений твердого компонента.

Пусть $\lambda_1 < \infty$. Как и выше, предел $\boldsymbol{v}$ последовательности $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ удовлетворяет начально-краевой задаче, аналогичной (3.16)–(3.19). Основное отличие заключается в том, что слабый предел $\partial \boldsymbol{w}/\partial t$ последовательности $\{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\}$, вообще говоря, отличен от $\boldsymbol{v}$, поскольку справедлива

Лемма 10. *Пусть $\lambda_1 < \infty$. Тогда сильные и слабые пределы $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}^s$, p_f, p_s последовательностей $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$ в области Ω_T удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, состоящей из закона сохранения количества движения*

$$\rho_f m \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^s}{\partial t^2} + \nabla(p_f + p_s + \hat{\beta}_0 \theta) - \hat{\rho} \boldsymbol{F} =$$
$$= \operatorname{div}\Big(\mu_0 \boldsymbol{A}_0^f : \boldsymbol{D}(x, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{B}_0^f p_s + \boldsymbol{B}_1^f \theta + \boldsymbol{B}_3^f \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \int_0^t \boldsymbol{B}_2^f (t-\tau) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau\Big), \tag{3.23}$$

уравнения неразрывности (3.17) *для скорости и давления в жидком компоненте* ($\boldsymbol{A}_0^f$, $\boldsymbol{B}_0^f$, $\boldsymbol{B}_1^f$, $\boldsymbol{B}_2^f$, $\boldsymbol{B}_3^f$ *определены в лемме* 9), *уравнения неразрывности*

$$\frac{1}{p_*} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{w}^s}{\partial t} + m \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{3.24}$$

соотношения

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^s}{\partial t} = (1-m)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) + \int\limits_0^t \boldsymbol{B}_1^s(t-\tau)\cdot\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau,$$
$$\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},t) - \rho_s\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) \tag{3.25}$$

в случае $\lambda_1 > 0$ *или закона сохранения количества движения в виде*

$$\rho_s\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^s}{\partial t^2} = \rho_s\boldsymbol{B}_2^s\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + ((1-m)I - \boldsymbol{B}_2^s)\boldsymbol{z} \tag{3.26}$$

в случае $\lambda_1 = 0$ *для перемещений твердого компонента. Задача дополняется начальными и граничными условиями* (3.19) *для скорости* $\boldsymbol{v}$ *жидкого компонента, а также однородными начальными условиями и краевым условием*

$$\boldsymbol{w}^s(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad (\boldsymbol{x},t)\in S, \quad t>0 \tag{3.27}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}^s$ *твердого компонента. В уравнениях* (3.23)–(3.27) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ *— единичная нормаль к границе* S *в точке* $\boldsymbol{x}\in S$*; матрицы* $\boldsymbol{B}_1^s(t)$ *и* $\boldsymbol{B}_2^s$ *определены ниже.*

Доказательство. Граничное условие (3.27) следует из уравнения (3.5), равенства

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{w}^s}{\partial t} + m\boldsymbol{v}$$

и однородных граничных условий для скорости жидкого компонента $\boldsymbol{v}$.

Данное равенство и уравнение (3.4) доказывают уравнение (3.24). Уравнения (3.23) выводятся аналогично. Выведем осредненные уравнения движения для перемещений $\boldsymbol{w}^s$ твердого компонента.

1. Пусть $\lambda_1 > 0$. Тогда решение системы микроскопических уравнений (3.6), (3.10) и (3.11), дополненной однородными начальными условиями, находится по формулам

$$\boldsymbol{W} = \int\limits_0^t \big(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau) + \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{W}^i(\boldsymbol{y},t-\tau)\otimes\boldsymbol{e}_i\cdot\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x},\tau)\big)\,d\tau,$$

$$R = \int\limits_0^t \sum_{i=1}^3 R^i(\boldsymbol{y},t-\tau)\boldsymbol{e}_i\cdot\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau,$$

где функции $\boldsymbol{W}^i(\boldsymbol{y},t)$ и $R^i(\boldsymbol{y},t)$ определяются через решение периодических начально-краевых задач

$$\rho_s\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^i}{\partial t^2} - \lambda_1\Delta\boldsymbol{W}^i + \nabla R^i = 0, \qquad \operatorname{div}_y \boldsymbol{W}^i = 0, \qquad \boldsymbol{y}\in Y_s, \quad t>0,$$
$$\boldsymbol{W}^i = 0, \qquad \boldsymbol{y}\in\gamma, \quad t>0, \tag{3.28}$$
$$\boldsymbol{W}^i(y,0) = 0, \qquad \rho_s\,\frac{\partial \boldsymbol{W}^i}{\partial t(y,0)} = \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{y}\in Y_s,$$

$\boldsymbol{e}_i$ — единичный вектор декартовой системы координат.

Следовательно,

$$\boldsymbol{B}_1^s(t) = \sum_{i=1}^3 \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{W}^i}{\partial t}\Big\rangle_{Y_s}\otimes\boldsymbol{e}_i(t).$$

Заметим, что в силу ограничений, наложенных на геометрию элементарной ячейки Y_s, задача (3.28) имеет единственное решение, которое является только обобщенным из-за несогласованных начальных и краевых условий. Вследствие этого при $t = 0$ функция $\boldsymbol{B}_1^s(t)$ недифференцируема.

2. Пусть $\lambda_1 = 0$. Тогда для решения системы (3.6), (3.12) и (3.13) в первую очередь необходимо определить давление $R(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ из решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в области Y_s в виде

$$R(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} R_i(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{e}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}, t),$$

где $R_i(\boldsymbol{y})$ — периодическое решение задачи

$$\Delta_y R_i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_s, \qquad \nabla_y R_i \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma.$$

Эта задача имеет единственное (с точностью до произвольной постоянной) решение. Формула (3.26) есть результат осреднения уравнения (3.12) и

$$\boldsymbol{B}_2^s = \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla R_i(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_s} \otimes \boldsymbol{e}_i,$$

где матрица $(1 - m)I - \boldsymbol{B}_2^s$ строго положительно определена. Действительно, пусть для произвольно выбранного единичного вектора $\boldsymbol{\xi}$

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{3} R_i \xi_i.$$

Тогда

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} = \langle (\boldsymbol{\xi} - \nabla \tilde{R})^2 \rangle_{Y_f} > 0.$$

Лемма 11. *При всех $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ слабые и сильные пределы θ, p_f, p_s удовлетворяют осредненному уравнению теплопроводности*

$$\hat{c}_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\beta_{0f}}{p_*} \frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \frac{\partial p_s}{\partial t} + (\beta_{0f} - \beta_{0s})(a_3^f + a_4^f) \Big\langle \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big\rangle_{\Omega} = \operatorname{div} (\boldsymbol{B}^{\theta} \nabla \theta) + \Psi, \tag{3.29}$$

где симметричная строго положительно-определенная матрица $\boldsymbol{B}^{\theta}$ определена ниже.

Доказательство. Осредненное уравнение теплопроводности (3.29) есть макроскопическое уравнение теплопроводности (3.15), в котором выражение $\langle \tilde{\varkappa}_0 \nabla_y \Theta \rangle_Y$ заменено на выражение

$$\langle \tilde{\varkappa}_0 \nabla_y \Theta \rangle_Y = \boldsymbol{B}_0^{\theta} \cdot \nabla \theta.$$

Последняя формула есть результат решения микроскопического уравнения теплопроводности (3.14) в виде

$$\Theta(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} \Theta_i(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, t),$$

где Θ_i $(i = 1, 2, 3)$ — периодические решения уравнения $\operatorname{div}_y [\tilde{\varkappa}_0 (\nabla_y \Theta_i + \boldsymbol{e}_i)] = 0$ в области Y. При этом

$$\boldsymbol{B}^{\theta} = \hat{\varkappa}_0 \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}_0^{\theta}, \qquad \boldsymbol{B}_0^{\theta} = \sum_{i=1}^{3} \nabla_y \langle \Theta_i \rangle_Y \otimes \boldsymbol{e}_i.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Meirmanov A. M., Sazhenkov S. A.** Generalized solutions to the linearized equations of thermoelastic solid and viscous thermofluid // Electron. J. Different. Equations. 2007. V. 2007, N 41. P. 1–29.
2. **Мейрманов А. М.** Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 645–667.
3. **Meirmanov A.** Homogenized models for a short-time filtration and for acoustic waves propagation in a porous media. (`www.arXiv.org/math.AP/0701613` v1, Jan. 2007).
4. **Meirmanov A.** Homogenization and filtration and seismic acoustic problems in thermo-elastic porous media. (`www.arXiv.org/math.AP/0611329` v1, Nov. 2006).
5. **Nguetseng G.** A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
6. **Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D.** An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. 1992. V. 18. P. 481–496.
7. **Жиков В. В.** Усреднение дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. М.: Наука, 1993.
8. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 11/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 29/VIII 2007 г.