ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2008, т. 261, с. 210–219

УДК 517.958: 531.72 + 517.958: 539.3(4)

Неизотермическая фильтрация и сейсмоакустика в пористых грунтах: уравнения термовязкоупругости и уравнения Ламе

©2008 г. А. М. Мейрманов[1]

Поступило в январе 2007 г.

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, описывающая совместное движение несжимаемого упругого пористого тела и несжимаемой жидкости, заполняющей поры. Исследуемая модель очень сложна, так как основные дифференциальные уравнения содержат под знаком производных недифференцируемые быстро осциллирующие малые и большие коэффициенты. На основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод усредненных уравнений, которыми в зависимости от геометрии пор является система уравнений термовязкоупругости (связное поровое пространство) либо система анизотропных уравнений Ламе термоупругости.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуется задача о совместном движении неизотермического упругого тела, перфорированного системой пор и каналов (твердый *скелет*), и неизотермической вязкой жидкости, заполняющей пустоты (*поровое пространство*). Мы ограничимся случаем, в котором поровое пространство геометрически периодическое. А именно пусть область $\Omega=(0,1)^3$ является периодическим повторением элементарной ячейки $Y^\varepsilon=\varepsilon Y$, где $Y=(0,1)^3$. Величина $1/\varepsilon$ является целым числом, так что Ω содержит целое число элементарных ячеек. Пусть Y_{s} — "твердая фаза" ячейки Y, а "жидкая фаза" Y_{f} — ее открытое дополнение. Положим также $\gamma=\partial Y_{\mathrm{f}}\cap\partial Y_{\mathrm{s}}$. Граница γ является поверхностью класса C^1, поровое пространство $\Omega^\varepsilon_{\mathrm{f}}$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon Y_{\mathrm{f}}$, твердый скелет $\Omega^\varepsilon_{\mathrm{s}}$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon Y_{\mathrm{s}}$, а граница $\Gamma^\varepsilon=\partial\Omega^\varepsilon_{\mathrm{s}}\cap\partial\Omega^\varepsilon_{\mathrm{f}}$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

В безразмерных переменных дифференциальные уравнения задачи для безразмерных перемещений $\mathbf{w}$ и безразмерной температуры θ в области $\Omega\in\mathbb{R}^3$ имеют вид

$$\alpha_\tau\rho^\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=\operatorname{div}\mathbb{P}+\rho^\varepsilon\mathbf{F},\tag{1}$$

$$\alpha_\tau c^\varepsilon_p\frac{\partial\theta}{\partial t}=\operatorname{div}_x(\alpha^\varepsilon_\varkappa\nabla_x\theta)-\alpha^\varepsilon_\theta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}_x\mathbf{w},\tag{2}$$

$$p+\alpha_p\chi^\varepsilon\operatorname{div}_x\mathbf{w}=0,\tag{3}$$

$$\pi+\alpha_\eta(1-\chi^\varepsilon)\operatorname{div}_x\mathbf{w}=0,\tag{4}$$

$$\mathbb{P}=\chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\Big)+(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\mathbf{w})-(p+\pi-\alpha^\varepsilon_\theta\theta)\mathbb{I}.$$

[1]Белгородский государственный университет, Белгород, Россия.
E-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Здесь и далее мы используем обозначения

$$\mathbb{D}(x,\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\big(\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T\big), \qquad \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi\Big(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\Big),$$

$$\rho^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_{\mathrm{f}} + (1-\chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\rho_{\mathrm{s}}, \qquad c_p^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})c_{p\mathrm{f}} + (1-\chi^\varepsilon(\mathbf{x}))c_{p\mathrm{s}},$$

$$\alpha_\varkappa^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\alpha_{\varkappa\mathrm{f}} + (1-\chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\alpha_{\varkappa\mathrm{s}}, \qquad \alpha_\theta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\alpha_{\theta\mathrm{f}} + (1-\chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\alpha_{\theta\mathrm{s}}$$

и $\chi(\mathbf{y})$ — характеристическая функция Y_{f} в Y. В нашей модели эта функция, определяющая геометрию порового пространства, считается известной.

Вывод уравнений (1)–(4) и описание безразмерных постоянных (все они строго положительны) даны в [1].

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями.

В предлагаемой модели естественным малым параметром является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области: $\varepsilon = l/L$, а безразмерные параметры α_i, $i=\tau,\nu,\ldots$, зависят от малого параметра ε. Пусть существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\tau(\varepsilon) = \tau_0, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_p(\varepsilon) = p_*, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\eta(\varepsilon) = \eta_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\varkappa\mathrm{s}}(\varepsilon) = \varkappa_{0\mathrm{s}}, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\varkappa\mathrm{f}} = \varkappa_{0\mathrm{f}}, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\theta\mathrm{f}}(\varepsilon) = \beta_{0\mathrm{f}}, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_{\theta\mathrm{s}}(\varepsilon) = \beta_{0\mathrm{s}}.$$

Нашей основной целью является нахождение предельных режимов (усредненных уравнений) при стремлении малого параметра к нулю.

Более простые модели для изотермических сред изучались в [2–8].

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как обычно, уравнения (1), (2) понимаются в смысле теории распределений. Они включают в себя собственно уравнения (1), (2) в каждой из областей $\Omega_{\mathrm{f}}^\varepsilon$ и $\Omega_{\mathrm{s}}^\varepsilon$ и краевые условия

$$[\vartheta] = 0, \qquad [\mathbf{w}] = 0, \qquad \mathbf{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon, \quad t \ge 0, \tag{1.1}$$

$$[\mathbb{P}\cdot\mathbf{n}] = 0, \qquad [\alpha_\varkappa^\varepsilon \nabla_x\theta\cdot\mathbf{n}] = 0, \qquad \mathbf{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon, \quad t \ge 0, \tag{1.2}$$

на границе Γ^ε, где $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к границе и

$$[\varphi](\mathbf{x}_0) = \varphi_{(\mathrm{s})}(\mathbf{x}_0) - \varphi_{(\mathrm{f})}(\mathbf{x}_0), \qquad \varphi_{(\mathrm{s})}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in\Omega_{\mathrm{s}}^\varepsilon}}\varphi(\mathbf{x}), \qquad \varphi_{(\mathrm{f})}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in\Omega_{\mathrm{f}}^\varepsilon}}\varphi(\mathbf{x}).$$

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (1), (2) и краевых условий (1.1), (1.2). Для нас будет удобной запись в виде интегральных тождеств.

Определение 1. Функции $(\mathbf{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon, p^\varepsilon, \pi^\varepsilon)$ называются обобщенным решением задачи (1)–(4), (1.1), (1.2), если они удовлетворяют условиям регулярности

$$\mathbf{w}^\varepsilon,\ \mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon),\ \operatorname{div}_x\mathbf{w}^\varepsilon,\ p^\varepsilon,\ \theta^\varepsilon, \nabla_x\theta^\varepsilon \in L^2(\Omega_T) \tag{1.3}$$

в области $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$, граничным условиям

$$\mathbf{w}^\varepsilon = 0, \qquad \theta^\varepsilon = 0, \qquad \mathbf{x}\in S = \partial\Omega, \quad t\ge 0, \tag{1.4}$$

уравнениям неразрывности

$$\frac{1}{\alpha_p}p^\varepsilon + \chi^\varepsilon\operatorname{div}_x\mathbf{w}^\varepsilon = -\frac{1}{m}\gamma^\varepsilon\chi^\varepsilon \tag{1.5}$$

и

$$\frac{1}{\alpha_p}\pi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\operatorname{div}_x \mathbf{w}^\varepsilon = \frac{1}{1-m}\gamma^\varepsilon(1-\chi^\varepsilon) \tag{1.6}$$

почти всюду в области Ω_T, интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T}\biggl(\alpha_\tau\rho^\varepsilon\mathbf{w}^\varepsilon\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \rho^\varepsilon\mathbf{F}\cdot\varphi - \chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}(\mathbf{x},\mathbf{w}^\varepsilon):\mathbb{D}\Bigl(x,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Bigr)+$$
$$+\bigl\{(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon) - \bigl(p^\varepsilon+\pi^\varepsilon-\alpha_\theta^\varepsilon\theta^\varepsilon\bigr)\mathbb{I}\bigr\}:\mathbb{D}(x,\varphi)\biggr)\,d\mathbf{x}\,dt = 0 \tag{1.7}$$

для всех гладких вектор-функций $\varphi=\varphi(\mathbf{x},t)$ таких, что $\varphi|_{\partial\Omega}=\varphi|_{t=T}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big|_{t=T}=0$, и интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T}\Bigl(\bigl(\alpha_\tau c_p^\varepsilon\theta^\varepsilon + \alpha_\theta^\varepsilon\operatorname{div}_x\mathbf{w}^\varepsilon\bigr)\frac{\partial\xi}{\partial t} - \alpha_\varkappa^\varepsilon\nabla_x\theta^\varepsilon\cdot\nabla_x\xi\Bigr)\,d\mathbf{x}\,dt = 0 \tag{1.8}$$

для всех гладких функций $\xi=\xi(\mathbf{x},t)$ таких, что $\xi|_{\partial\Omega}=\xi|_{t=T}=0$.

В (1.7) через $A:B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е. $A:B=\operatorname{tr}(B^*\circ A)=\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}B_{ji}$, а нормирующее слагаемое $\gamma^\varepsilon=\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\operatorname{div}_x\mathbf{w}^\varepsilon\,d\mathbf{x}$ в (1.5), (1.6) введено так, чтобы

$$\int\limits_\Omega p^\varepsilon\,d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega \pi^\varepsilon\,d\mathbf{x} = 0.$$

В дальнейшем считаем, что выполнено

Предположение 1. 1. Безразмерные параметры в задаче (1)–(4), (1.1), (1.2) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0<\varkappa_{0\mathrm{f}},\varkappa_{0\mathrm{s}},\mu_0,\lambda_0<\infty,\qquad \tau_0,\beta_{0\mathrm{f}},\beta_{0\mathrm{s}},p_*^{-1},\eta_0^{-1}<\infty,\qquad p_*+\eta_0=\infty.$$

2. Функции $\mathbf{F}$, $\partial\mathbf{F}/\partial t$ и $\partial^2\mathbf{F}/\partial t^2$ ограничены в $L^2(\Omega_T)$.

Условие $p_*=\infty$ означает, что рассматриваемая жидкость является несжимаемой, а условие $\eta_0=\infty$ означает, что несжимаемым является твердый скелет. Всюду ниже параметры модели могут принимать все разрешенные значения. Так, например, если $\tau_0=0$ или $\eta_0^{-1}=0$, то во всех уравнениях слагаемые, содержащие эти величины, пропадают.

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1, 2.

Теорема 1. *При сделанных предположениях для всех $\varepsilon>0$ на произвольном интервале времени $[0,T]$ существует единственное обобщенное решение задачи* (1)–(4), (1.1), (1.2) *и справедливы следующие оценки*:

$$\max_{0\le t\le T}\biggl\|\Bigl|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Bigr| + \alpha_\tau\Bigl|\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\Bigr| + \Bigl|\nabla_x\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Bigr|\biggr\|_{2,\Omega}\le C_0, \tag{1.9}$$

$$\max_{0\le t\le T}\biggl(\Bigl\|\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\Bigr\|_{2,\Omega} + \|\nabla_x\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega}\biggr)\le C_0, \tag{1.10}$$

$$\max_{0\le t\le T}\bigl(\|\pi^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega} + \|p^\varepsilon(t)\|_{2,\Omega}\bigr)\le C_0, \tag{1.11}$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε.

Теорема 2. *Последовательности* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{\theta^\varepsilon\}$ *сходятся сильно в* $L^2(\Omega_T)$ *и слабо в* $L^2((0,T);W_2^1(\Omega))$ *к функциям* $\mathbf{w}$ *и* θ, *а последовательности* $\{p^\varepsilon\}$ *и* $\{\pi^\varepsilon\}$ *сходятся слабо в* $L^2(\Omega_T)$ *к функциям* p *и* π. *При этом функции* $\mathbf{w}$, θ, p *и* π *удовлетворяют в* Ω_T *следующей начально-краевой задаче*:

$$\tau_0\widehat{\rho}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}+\nabla(q+\pi-\widehat{\beta}_0\theta)-\widehat{\rho}\mathbf{F}=\operatorname{div}_x\Biggl(\mathbb{A}_1:\mathbb{D}\Bigl(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\Bigr)+\mathbb{A}_2:\mathbb{D}(x,\mathbf{w})+$$
$$+\int\limits_0^t\Bigl(\mathbb{A}_3(t-\tau):\mathbb{D}(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau))+B(t-\tau)\operatorname{div}_x\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau)+B^\theta(t-\tau)\theta(\mathbf{x},\tau)\Bigr)\,d\tau\Biggr),\qquad(1.12)$$

$$\frac{1}{p_*}p+m\operatorname{div}_x\mathbf{w}=-\int\limits_0^t\Bigl(C_1(t-\tau):\mathbb{D}(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau))+a_1(t-\tau)\operatorname{div}_x\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau)+$$
$$+a_1^\theta(t-\tau)\theta(\mathbf{x},\tau)\Bigr)\,d\tau-a(t)\langle\theta\rangle_\Omega,\qquad(1.13)$$

$$\frac{1}{\eta_0}\pi+(1-m)\operatorname{div}_x\mathbf{w}=-\int\limits_0^t\Bigl(C_2(t-\tau):\mathbb{D}(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau))+a_2(t-\tau)\operatorname{div}_x\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau)+$$
$$+a_2^\theta(t-\tau)\theta(\mathbf{x},\tau)\Bigr)\,d\tau+a(t)\langle\theta\rangle_\Omega,\qquad(1.14)$$

$$\tau_0\widehat{c}_p\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\beta_{0\mathrm{f}}}{p_*}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\beta_{0\mathrm{s}}}{\eta_0}\frac{\partial\pi}{\partial t}+(\beta_{0\mathrm{s}}-\beta_{0\mathrm{f}})\frac{\partial}{\partial t}(a(t)\langle\theta\rangle_\Omega)=\operatorname{div}_x\bigl(B_0^\theta\cdot\nabla_x\theta\bigr)+\Psi.\qquad(1.15)$$

Задача замыкается однородными начальными и краевыми условиями для θ *и* $\mathbf{w}$.

В (1.12)–(1.15)

$$\widehat{\rho}=\rho_{\mathrm{f}}m+\rho_{\mathrm{s}}(1-m),\qquad\widehat{\beta}_0=\beta_{0\mathrm{f}}m+\beta_{0\mathrm{s}}(1-m),\qquad\widehat{c}_p=c_{p\mathrm{f}}m+c_{p\mathrm{s}}(1-m),\qquad m=\int\limits_Y\chi(y)\,dy,$$

$\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ *и* $\mathbb{A}_3(t)$ *— тензоры четвертого ранга,* $B(t)$, $B^\theta(t)$, B_0^θ, $C_1(t)$ *и* $C_2(t)$ *— матрицы и* $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_1^\theta(t)$, $a_2^\theta(t)$ *и* $a(t)$ *— скаляры. Точное выражение этих объектов дано ниже формулами* (4.17)–(4.24). *Матрица* B_0^θ *строго положительно определена.*

В случае связного порового пространства симметричный тензор $\mathbb{A}_1$ *строго положительно определен. В противном случае* (*поровое пространство несвязное, если* $\gamma\cap\partial Y=\varnothing$) $\mathbb{A}_1=0$ *и система* (1.12) *вырождается в нелокальную анизотропную систему уравнений Ламе с симметричным строго положительно определенным тензором* $\mathbb{A}_2$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Доказательство теоремы 2 основано на систематическом применении метода двухмасштабной сходимости, предложенного Г. Нгуетсенгом [9] и получившего широкое применение в теории усреднения (см., например, обзор [10] и работы В.В. Жикова [11–13]).

Определение 2. Последовательность $\{\varphi^\varepsilon\}\subset L^2(\Omega_T)$ называется *двухмасштабно сходящейся* к пределу $\varphi\in L^2(\Omega_T\times Y)$ тогда и только тогда, когда для любой гладкой 1-периодической по $\mathbf{y}$ функции $\sigma=\sigma(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\searrow0}\int\limits_{\Omega_T}\varphi^\varepsilon(\mathbf{x},t)\sigma(\mathbf{x},t,\mathbf{x}/\varepsilon)\,d\mathbf{x}\,dt=\int\limits_{\Omega_T}\int\limits_Y\varphi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\sigma(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{x}\,dt.\qquad(2.1)$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей содержатся в следующей теореме [9, 10].

Теорема 3 (теорема Нгуетсенга). 1. *Из любой ограниченной последовательности в* $L^2(\Omega_T)$ *можно выбрать подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу* $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$.

2. *Пусть последовательности* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *и* $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ *равномерно ограничены в* $L^2(\Omega_T)$. *Тогда существуют* 1*-периодическая по* $\mathbf{y}$ *функция* $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ *и подпоследовательность из* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *такие, что* $\varphi, \nabla_y\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ *и* φ^ε *и* $\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon$ *двухмасштабно сходятся к* φ *и* $\nabla_y\varphi$ *соответственно.*

3. *Пусть последовательности* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *и* $\{\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ *равномерно ограничены в* $L^2(\Omega_T)$. *Тогда существуют функции* $\varphi \in L^2(\Omega_T)$ *и* $\psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ *и подпоследовательность из* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *такие, что* ψ 1*-периодична по* $\mathbf{y}$, $\nabla_y\psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ *и* φ^ε *и* $\nabla_x\varphi^\varepsilon$ *двухмасштабно сходятся к* φ *и* $\nabla_x\varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla_y\psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ *соответственно.*

Следствие 1. *Пусть* $\sigma \in L^2(Y)$ *и* $\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) := \sigma(\mathbf{x}/\varepsilon)$. *Пусть последовательность* $\{\varphi^\varepsilon\} \subset \subset L^2(\Omega_T)$ *двухмасштабно сходится к некоторому пределу* $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$. *Тогда последовательность* $\sigma^\varepsilon\varphi^\varepsilon$ *двухмасштабно сходится к* $\sigma\varphi$.

Всюду ниже будем использовать следующие обозначения:

1) $\langle\Phi\rangle_Y = \int_Y \Phi\,d\mathbf{y}$, $\langle\Phi\rangle_{Y_\mathrm{f}} = \int_Y \chi\Phi\,d\mathbf{y}$, $\langle\Phi\rangle_{Y_\mathrm{s}} = \int_Y (1-\chi)\Phi\,d\mathbf{y}$, $\langle\varphi\rangle_\Omega = \int_\Omega \varphi\,d\mathbf{x}$, $\langle\varphi\rangle_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} \varphi\,d\mathbf{x}\,dt$;
2) если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два вектора, то матрица $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ определяется как
$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$
для произвольного вектора $\mathbf{c}$;
3) если B и C — две матрицы, то $B\otimes C$ — тензор четвертого ранга такой, что его свертка с произвольной матрицей A дается формулой
$$(B\otimes C) : A = B(C : A);$$
4) через $\mathbb{I}^{ij}$ обозначим матрицу, у которой единственный отличный от нуля элемент, равный единице, стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца;
5) наконец,
$$J^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i),$$
где $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — ортонормированный базис.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

При всех $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\max_{0<t<T}\left(\sqrt{\alpha_\lambda}\left\|\nabla_x\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega^\varepsilon_\mathrm{s}} + \sqrt{\alpha_\tau}\left\|\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{2,\Omega} + \sqrt{\alpha_p}\left\|\operatorname{div}_x\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega^\varepsilon_\mathrm{f}} + \sqrt{\alpha_\tau}\left\|\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega}\right) + \\ + \sqrt{\alpha_\mu}\left\|\chi^\varepsilon\nabla_x\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|_{2,\Omega_T} + \left\|\sqrt{\alpha^\varepsilon_\theta}\nabla_x\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{2,\Omega_T} \leq C_0, \quad (3.1)$$

где C_0 не зависит от ε. Она получается после дифференцирования уравнений для $\mathbf{w}^\varepsilon$ и θ^ε по времени, умножения первого уравнения на $\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon/\partial t^2$, второго на $\partial\theta^\varepsilon/\partial t$, интегрирования по частям и суммирования. Эта оценка гарантирует существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(4), (1.1), (1.2).

Оценки (1.9) и (1.10) следуют из оценок (3.1) и неравенства Пуанкаре.

Оценка (1.11) для давлений следует из интегрального тождества (1.7) и оценок (1.9) и (1.10) как оценка соответствующего функционала, если мы вспомним, что

$$\int\limits_{\Omega} \big(p^{\varepsilon}(\mathbf{x},t) + \pi^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\big)\, d\mathbf{x} = 0.$$

Действительно, из интегрального тождества (1.7) следует, что

$$\left| \int\limits_{\Omega} \big(p^{\varepsilon}(\mathbf{x},t) + \pi^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\big)\, \mathrm{div}_x\, \boldsymbol{\psi}\, d\mathbf{x} \right| \leq C \|\nabla \boldsymbol{\psi}\|_{2,\Omega}.$$

Выбирая теперь $\boldsymbol{\psi}$ так, чтобы $p^{\varepsilon} + \pi^{\varepsilon} = \mathrm{div}_x\, \boldsymbol{\psi}$, получим оценку для суммы давлений $p^{\varepsilon} + \pi^{\varepsilon}$. Такой выбор всегда возможен (см. [14]), если положить

$$\boldsymbol{\psi} = \nabla\varphi + \boldsymbol{\psi}_0, \qquad \mathrm{div}_x\, \boldsymbol{\psi}_0 = 0, \qquad \Delta\varphi = p^{\varepsilon} + \pi^{\varepsilon}, \qquad \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (\nabla\varphi + \boldsymbol{\psi}_0)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Осталось заметить, что в силу ортогональности функций p^{ε} и π^{ε} оценка суммы влечет оценки для каждого слагаемого.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

4.1. Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей перемещений, температур и давлений. В силу теоремы 1 последовательности $\{\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$, $\{\theta^{\varepsilon}\}$, $\{p^{\varepsilon}\}$ и $\{\pi^{\varepsilon}\}$ равномерно по ε ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Следовательно, существуют подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и функции p, π, $\mathbf{w}$ и θ такие, что при $\varepsilon \searrow 0$

$$p^{\varepsilon} \to p, \qquad \pi^{\varepsilon} \to \pi \qquad \text{слабо в } L^2(\Omega_T),$$

$$\mathbf{w}^{\varepsilon} \to \mathbf{w}, \qquad \theta^{\varepsilon} \to \theta \qquad \text{сильно в } L^2(\Omega_T),$$

$$\nabla_x \mathbf{w}^{\varepsilon} \to \nabla_x \mathbf{w}, \qquad \nabla_x \theta^{\varepsilon} \to \nabla_x \theta \qquad \text{слабо в } L^2(\Omega_T).$$

Воспользовавшись последними соотношениями и теоремой Нгуетсенга, заключаем, что существуют 1-периодические по $\mathbf{y}$ функции $P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, $\Pi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, $\Theta(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ такие, что последовательности $\{p^{\varepsilon}\}$, $\{\pi^{\varepsilon}\}$, $\{\nabla\theta^{\varepsilon}\}$ и $\{\nabla\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ сходятся двухмасштабно при $\varepsilon \searrow 0$ соответственно к P, Π, $\nabla_x\theta + \nabla_y\Theta$ и $\nabla_x\mathbf{w} + \nabla_y\mathbf{W}$.

4.2. Микро- и макроскопические уравнения.

Лемма 4.1. *Двухмасштабные пределы последовательностей $\{p^{\varepsilon}\}$, $\{\pi^{\varepsilon}\}$, $\{\nabla\theta^{\varepsilon}\}$ и $\{\nabla\mathbf{w}^{\varepsilon}\}$ удовлетворяют в $Y_T = Y \times (0,T)$ следующим микроскопическим соотношениям*:

$$\frac{1}{\eta_0}\Pi + (1-\chi)\big(\mathrm{div}_x\, \mathbf{w} + \mathrm{div}_y\, \mathbf{W}\big) = \frac{\gamma}{(1-m)}(1-\chi), \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{p_*}P + \chi\big(\mathrm{div}_x\, \mathbf{w} + \mathrm{div}_y\, \mathbf{W}\big) = -\frac{\gamma}{m}\chi, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\nabla_y\big(P + \Pi - (\beta_{0\mathrm{f}}\chi + \beta_{0\mathrm{s}}(1-\chi))\theta\big) = \mathrm{div}_y\bigg(\chi\mu_0\bigg(\mathbb{D}\bigg(x, \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\bigg) + \mathbb{D}\bigg(y, \frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}\bigg)\bigg) +{}\\ + (1-\chi)\lambda_0\big(\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) + \mathbb{D}(y,\mathbf{W})\big)\bigg),\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\mathrm{div}_y\big(\chi\varkappa_{0\mathrm{f}}(\nabla_x\theta + \nabla_y\Theta) + (1-\chi)\varkappa_{0\mathrm{s}}(\nabla_x\theta + \nabla_y\Theta)\big) = 0. \tag{4.4}$$

Лемма 4.2. *Слабые и сильные пределы p, π, θ и $\mathbf{w}$ удовлетворяют в Ω_T следующей системе макроскопических уравнений*:

$$\frac{1}{\eta_0}\pi + (1-m)\operatorname{div}_x \mathbf{w} + \langle \operatorname{div}_y \mathbf{W}\rangle_{Y_{\mathrm{s}}} = \gamma, \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{p_*}p + m\operatorname{div}_x \mathbf{w} + \langle \operatorname{div}_y \mathbf{W}\rangle_{Y_{\mathrm{f}}} = -\gamma, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\tau_0\widehat{\rho}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} + \nabla(q+\pi-\widehat{\beta}_0\theta) - \widehat{\rho}\,\mathbf{F} = \operatorname{div}_x\biggl(\mu_0\biggl(m\mathbb{D}\biggl(x,\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\biggr) + \biggl\langle \mathbb{D}\biggl(y,\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\biggr)\biggr\rangle_{Y_{\mathrm{f}}}\biggr) +{}\\ + \lambda_0\bigl((1-m)\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) + \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{W})\rangle_{Y_{\mathrm{f}}}\bigr)\biggr),\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\tau_0\widehat{c}_p\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\beta_{0\mathrm{f}}}{p_*}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\beta_{0\mathrm{s}}}{\eta_0}\frac{\partial \pi}{\partial t} + (\beta_{0\mathrm{s}}-\beta_{0\mathrm{f}})\frac{\partial\gamma}{\partial t} - \Psi = \operatorname{div}_x\Bigl(\varkappa_{0\mathrm{f}}\bigl(m\nabla_x\theta + \langle\nabla_y\Theta\rangle_{Y_{\mathrm{f}}}\bigr) +{}\\ + \varkappa_{0\mathrm{s}}\bigl((1-m)\nabla_x\theta + \langle\nabla_y\Theta\rangle_{Y_{\mathrm{s}}}\bigr)\Bigr).\end{aligned} \tag{4.8}$$

В (4.1)–(4.8)

$$\gamma = \bigl\langle(\langle \operatorname{div}_y \mathbf{W}\rangle_{Y_{\mathrm{s}}})\bigr\rangle_{\Omega}, \qquad \widehat{\rho} = \rho_{\mathrm{f}}m + \rho_{\mathrm{s}}(1-m),$$

$$\widehat{\beta}_0 = \beta_{0\mathrm{f}}m + \beta_{0\mathrm{s}}(1-m), \qquad \widehat{c}_p = c_{p\mathrm{f}}m + c_{p\mathrm{s}}(1-m).$$

Доказательство. Для доказательства (4.1) и (4.2) умножим уравнения (1.5) и (1.6) на $\psi^\varepsilon = \psi(\mathbf{x},t,\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\psi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ — произвольная 1-периодическая по $\mathbf{y}$ функция, и проинтегрируем по области Ω. Переходя к пределу при $\varepsilon\searrow 0$, получим требуемые соотношения.

Уравнения (4.3) и (4.4) следуют из интегральных тождеств (1.7) и (1.8), если в качестве пробных функций рассмотреть функции вида $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon = \varepsilon\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t,\mathbf{x}/\varepsilon)$ (тождество (1.7)) и $\xi^\varepsilon = \varepsilon\xi(\mathbf{x},t,\mathbf{x}/\varepsilon)$ (тождество (1.8)), где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и $\xi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ — произвольные 1-периодические по $\mathbf{y}$ функции, и далее перейти к пределу при $\varepsilon\searrow 0$.

Уравнения (4.5) и (4.6) являются результатом усреднения по элементарной ячейке Y уравнений (4.1) и (4.2), а уравнения (4.7) и (4.8) следуют из интегральных тождеств (1.7) и (1.8) после предельного перехода при $\varepsilon\searrow 0$ с пробными функциями, не зависящими от "быстрой" переменной y. При этом в тождестве (1.8) мы воспользовались уравнениями неразрывности (1.5) и (1.6). □

4.3. Усредненные уравнения.

Лемма 4.3. *Слабые и сильные пределы p, π, θ и $\mathbf{w}$ удовлетворяют в Ω_T следующей системе усредненных уравнений*:

$$\begin{aligned}\tau_0\widehat{\rho}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} + \nabla(q+\pi-\widehat{\beta}_0\theta) - \widehat{\rho}\,\mathbf{F} = \operatorname{div}_x\biggl(\mathbb{A}_1 : \mathbb{D}\biggl(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\biggr) + \mathbb{A}_2 : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}) +{}\\ + \int_0^t\Bigl(\mathbb{A}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau)) + B(t-\tau)\operatorname{div}_x\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau) + B^\theta(t-\tau)\theta(\mathbf{x},\tau)\Bigr)\,d\tau\biggr),\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_*}p + m\operatorname{div}_x\mathbf{w} = -\int_0^t\Bigl(C_1(t-\tau) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau)) + a_1(t-\tau)\operatorname{div}_x\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau) +{}\\ + a_1^\theta(t-\tau)\theta(\mathbf{x},\tau)\Bigr)\,d\tau - a(t)\langle\theta\rangle_\Omega,\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{\eta_0}\pi + (1-m)\operatorname{div}_x \mathbf{w} = -\int\limits_0^t \Big(C_2(t-\tau) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},\tau)) + a_2(t-\tau)\operatorname{div}_x \mathbf{w}(\mathbf{x},\tau) + \\ + a_2^\theta(t-\tau)\theta(\mathbf{x},\tau)\Big)\,d\tau + a(t)\langle\theta\rangle_\Omega, \tag{4.11}$$

$$\tau_0\widehat{c}_p\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\beta_{0\mathrm{f}}}{p_*}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\beta_{0\mathrm{s}}}{\eta_0}\frac{\partial\pi}{\partial t} + (\beta_{0\mathrm{s}} - \beta_{0\mathrm{f}})\frac{\partial}{\partial t}(a(t)\langle\theta\rangle_\Omega) = \operatorname{div}_x\big(B_0^\theta\cdot\nabla_x\theta\big) + \Psi. \tag{4.12}$$

Здесь $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ и $\mathbb{A}_3(t)$ — тензоры четвертого ранга, $B(t)$, $B^\theta(t)$, B_0^θ, $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — матрицы и $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_1^\theta(t)$, $a_2^\theta(t)$ и $a(t)$ — скаляры. Точное выражение этих объектов дано ниже формулами (4.17)–(4.24).

Доказательство. Положим

$$\mathbb{Z}(\mathbf{x},t) = \mu_0\mathbb{D}\bigg(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\bigg) - \lambda_0\mathbb{D}(x,\mathbf{w}), \qquad Z_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot(\mathbb{Z}\cdot\mathbf{e}_j), \qquad z_1(t) = \langle\theta\rangle_\Omega,$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^3 z_i(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_i = (\varkappa_{0\mathrm{f}} - \varkappa_{0\mathrm{f}})\nabla_x\theta, \qquad z_0(\mathbf{x},t) = \operatorname{div}_x \mathbf{w}.$$

Как обычно, мы ищем решения микроскопических уравнений (4.1)–(4.4) в виде

$$\mathbf{W} = \int\limits_0^t \Bigg[\mathbf{W}^0(\mathbf{y},t-\tau)z_0(\mathbf{x},\tau) + \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{W}^{ij}(\mathbf{y},t-\tau)Z_{ij}(\mathbf{x},\tau) + \\ + \mathbf{W}^\theta(\mathbf{y},t-\tau)(\theta(\mathbf{x},\tau) - z_1(\tau)) + \mathbf{W}_1^\theta(\mathbf{y},t-\tau)z_1(\tau)\Bigg]\,d\tau, \tag{4.13}$$

$$P = \chi\int\limits_0^t \Bigg[P^0(\mathbf{y},t-\tau)z_0(\mathbf{x},\tau) + \sum_{i,j=1}^3 P^{ij}(\mathbf{y},t-\tau)Z_{ij}(\mathbf{x},\tau) + \\ + P^\theta(\mathbf{y},t-\tau)(\theta(\mathbf{x},\tau) - z_1(\tau)) + P_1^\theta(\mathbf{y},t-\tau)z_1(\tau)\Bigg]\,d\tau, \tag{4.14}$$

$$\Pi = (1-\chi)\int\limits_0^t \Bigg[\Pi^0(\mathbf{y},t-\tau)z_0(\mathbf{x},\tau) + \sum_{i,j=1}^3 \Pi^{ij}(\mathbf{y},t-\tau)Z_{ij}(\mathbf{x},\tau) + \\ + \Pi^\theta(\mathbf{y},t-\tau)(\theta(\mathbf{x},\tau) - z_1(\tau)) + \Pi_1^\theta(\mathbf{y},t-\tau)z_1(\tau)\Bigg]\,d\tau, \tag{4.15}$$

$$\Theta = \sum_{i=1}^3 \Theta^i(\mathbf{y})z_i(\mathbf{x},t), \tag{4.16}$$

где 1-периодические по $\mathbf{y}$ функции $\mathbf{W}^0$, $\mathbf{W}^\theta$, $\mathbf{W}^{ij}$, P^0, P^θ, P^{ij}, Π^0, Π^θ, Π^{ij} и Θ^i удовлетворяют следующим начально-краевым задачам на элементарной ячейке Y.

Задача (I):

$$\operatorname{div}_y\bigg(\chi\mu_0\mathbb{D}\bigg(y,\frac{\partial\mathbf{W}^{ij}}{\partial t}\bigg) + (1-\chi)\big(\lambda_0\mathbb{D}(y,\mathbf{W}^{ij}) - ((1-\chi)\Pi^{ij} + \chi P^{ij})\mathbb{I}\big)\bigg) = 0,$$

$$\frac{1}{p_*}P^{ij} + \chi\operatorname{div}_y \mathbf{W}^{ij} = 0, \qquad \frac{1}{\eta_0}\Pi^{ij} + (1-\chi)\operatorname{div}_y \mathbf{W}^{ij} = 0,$$

$$\mathbf{W}^{ij}(\mathbf{y},0) = \mathbf{W}_0^{ij}(\mathbf{y}), \qquad \operatorname{div}_y\big(\chi\big(\mu_0\mathbb{D}(y,\mathbf{W}_0^{ij}) + J^{ij}\big)\big) = 0.$$

Задача (II):

$$\operatorname{div}_y\Big(\chi\mu_0\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\mathbf{W}^0}{\partial t}\Big)+(1-\chi)\big(\lambda_0\mathbb{D}(y,\mathbf{W}^0)-((1-\chi)\Pi^0+\chi P^0)\mathbb{I}\big)\Big)=0,$$

$$\chi\mathbf{W}^0(\mathbf{y},0)=0,\qquad \frac{1}{p_*}P^0+\chi(\operatorname{div}_y\mathbf{W}^0+1)=0,\qquad \frac{1}{\eta_0}\Pi^0+(1-\chi)(\operatorname{div}_y\mathbf{W}^0+1)=0.$$

Задача (III):

$$\operatorname{div}_y\Big(\chi\mu_0\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\mathbf{W}^\theta}{\partial t}\Big)+(1-\chi)\big(\lambda_0\mathbb{D}(y,\mathbf{W}^\theta)-\big((1-\chi)\Pi^\theta+\chi P^\theta-\beta_{0\mathrm{f}}\chi-\beta_{0\mathrm{s}}(1-\chi)\big)\mathbb{I}\big)\Big)=0,$$

$$\chi\mathbf{W}^\theta(\mathbf{y},0)=0,\qquad \frac{1}{p_*}P^\theta+\chi\operatorname{div}_y\mathbf{W}^\theta=0,\qquad \frac{1}{\eta_0}\Pi^\theta+(1-\chi)\operatorname{div}_y\mathbf{W}^\theta=0.$$

Задача (IV):

$$\operatorname{div}_y\Big(\chi\mu_0\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\mathbf{W}_1^\theta}{\partial t}\Big)+(1-\chi)\big(\lambda_0\mathbb{D}(y,\mathbf{W}_1^\theta)-\big((1-\chi)\Pi_1^\theta+\chi P_1^\theta-\beta_{0\mathrm{f}}\chi-\beta_{0\mathrm{s}}(1-\chi)\big)\mathbb{I}\big)\Big)=0,$$

$$\mathbf{W}_1^\theta(\mathbf{y},0)=0,\qquad \frac{1}{p_*}P_1^\theta+\chi\operatorname{div}_y\mathbf{W}_1^\theta=-\frac{\chi}{m}\big\langle\operatorname{div}_y\mathbf{W}_1^\theta\big\rangle_{Y_\mathrm{s}},$$

$$\frac{1}{\eta_0}\Pi_1^\theta+(1-\chi)\operatorname{div}_y\mathbf{W}_1^\theta=\big\langle\operatorname{div}_y\mathbf{W}_1^\theta\big\rangle_{Y_\mathrm{s}}\frac{1-\chi}{1-m}.$$

Задача (V):

$$\operatorname{div}_y\big(\chi\varkappa_{0\mathrm{f}}+(1-\chi)\varkappa_{0\mathrm{s}}\nabla_y\Theta^i+\chi\mathbf{e}_i\big)=0.$$

Подставляя далее выражения (4.13)–(4.16) в макроскопические уравнения (4.5)–(4.8), находим

$$\mathbb{A}_1=\mu_0 m\sum_{i,j=1}^{3}J^{ij}\otimes J^{ij}+\mu_0\mathbb{A}_0^\mathrm{f},\qquad \mathbb{A}_0^\mathrm{f}=\mu_0\sum_{i,j=1}^{3}\big\langle\mathbb{D}\big(y,\mathbf{W}_0^{ij}\big)\big\rangle_{Y_\mathrm{f}}\otimes J^{ij},\tag{4.17}$$

$$\mathbb{A}_2=\lambda_0(1-m)\sum_{i,j=1}^{3}J^{ij}\otimes J^{ij}-\lambda_0\mathbb{A}_0^\mathrm{f}+\mu_0\mathbb{A}_1^\mathrm{f}(0),\qquad \mathbb{A}_3(t)=\mu_0\frac{d}{dt}\mathbb{A}_1^\mathrm{f}(t)-\lambda_0\mathbb{A}_1^\mathrm{f}(t),\tag{4.18}$$

$$\mathbb{A}_1^\mathrm{f}(t)=\sum_{i,j=1}^{3}\Big\{\mu_0\Big\langle\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\mathbf{W}^{ij}}{\partial t}\Big)\Big\rangle_{Y_\mathrm{f}}+\lambda_0\big\langle\mathbb{D}\big(y,\mathbf{W}^{ij}\big)\big\rangle_{Y_\mathrm{s}}\Big\}\otimes J^{ij},\tag{4.19}$$

$$B(t)=\mu_0\Big\langle\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\mathbf{W}^0}{\partial t}\Big)\Big\rangle_{Y_\mathrm{f}}+\lambda_0\big\langle\mathbb{D}\big(y,\mathbf{W}^0\big)\big\rangle_{Y_\mathrm{s}},\tag{4.20}$$

$$C_1(t)=-C_2(t)=\sum_{i,j=1}^{3}\big\langle\operatorname{div}_y\mathbf{W}^{ij}\big\rangle_{Y_\mathrm{f}}J^{ij},\qquad a(t)=\big\langle\operatorname{div}_y\mathbf{W}_1^\theta\big\rangle_{Y_\mathrm{s}},\tag{4.21}$$

$$a_1(t)=-a_2(t)=\big\langle\operatorname{div}_y\mathbf{W}^0\big\rangle_{Y_\mathrm{f}},\qquad a_1^\theta(t)=-a_2^\theta(t)=\big\langle\operatorname{div}_y\mathbf{W}^\theta\big\rangle_{Y_\mathrm{f}},\tag{4.22}$$

$$B^\theta(t)=\mu_0\Big\langle\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\mathbf{W}^\theta}{\partial t}\Big)\Big\rangle_{Y_\mathrm{f}}+\lambda_0\big\langle\mathbb{D}\big(y,\mathbf{W}^\theta\big)\big\rangle_{Y_\mathrm{s}},\tag{4.23}$$

$$B_0^\theta=\widehat{\varkappa}_0\mathbb{I}+\sum_{i=1}^{3}\big\{\varkappa_{0\mathrm{f}}\langle\nabla\Theta^i\rangle_{Y_\mathrm{f}}+\varkappa_{0\mathrm{s}}\langle\nabla\Theta^i\rangle_{Y_\mathrm{s}}\big\}\otimes\mathbf{e}_i,\tag{4.24}$$

где $\widehat{\varkappa}_0=m\varkappa_{0\mathrm{f}}+(1-m)\varkappa_{0\mathrm{s}}$. $\square$

Лемма 4.4. *Тензоры* $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ *и* $\mathbb{A}_3$, *матрицы* B, B^θ, B_0^θ, C_1 *и* C_2 *и скаляры* a_1, a_2, a_1^θ, a_2^θ *и* a *определены корректно и являются бесконечно дифференцируемыми функциями времени.*

Если поровое пространство связное, то симметричный тензор $\mathbb{A}_1$ *строго положительно определен. В противном случае (изолированные поры)* $\mathbb{A}_1 = 0$ *и симметричный тензор* $\mathbb{A}_2$ *строго положительно определен. Симметричная матрица* B_0^θ *строго положительно определена.*

Основные моменты доказательства леммы, за исключением утверждения о матрице B_0^θ, можно найти в [8]. Свойства матрицы B_0^θ хорошо известны (см. [3, 15]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meirmanov A.M., Sazhenkov S.A.* Generalized solutions to linearized equations of thermoelastic solid and viscous thermofluid // Electron. J. Diff. Equat. 2007. Pap. 41. 29 p.
2. *Burridge R., Keller J.B.* Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70, N 4. P. 1140–1146.
3. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
4. *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. P. 1394–1414.
5. *Gilbert R.P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed. I // Nonlin. Anal. Theory, Meth. and Appl. 2000. V. 40. P. 185–212.
6. *Clopeau Th., Ferrín J.L., Gilbert R.P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed. II // Math. and Comput. Modell. 2001. V. 33. P. 821–841.
7. *Ferrin J.L., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluid // Math. Meth. Appl. Sci. 2003. V. 26. P. 831–859.
8. *Meirmanov A.M.* Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media: E-print, 2006. arXiv:math/0611330.
9. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
10. *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence // Intern. J. Pure and Appl. Math. 2002. V. 2, N 1. P. 35–86.
11. *Жиков В.В.* Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Мат. сб. 1996. Т. 187, №8. С. 3–40.
12. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сб. 2000. Т. 191, №7. С. 31–72.
13. *Жиков В.В.* Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, №2. С. 81–148.
14. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
15. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.