Дифференциальные уравнения. 2016, № 1, Т. 52, С. 41-59

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Аннотация. В банаховом пространстве рассмотрена задача Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Доказано необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи, которое формулируется в терминах оценки нормы резольвенты дробной степени резольвенты и ее производных. Установлен ряд свойств решений и приводятся примеры.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k>0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)=Au(t), \quad t>0, \tag{1}$$

$$u(0)=u_0, \quad u'(0)=0. \tag{2}$$

Случай $k=0$ подробно рассмотрен в [1], [2]. В этих работах установлено, что задача (1), (2) при $k=0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором операторной косинус-функции $C(t)$ или косинус-оператор-функции (КОФ). По поводу терминологии см. [3] и обзорные работы [4], [5]. В этих же работах приводятся необходимые и достаточные условия того, что оператор A является генератором КОФ, которые формулируются в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$ оператора A и ее производных.

Задача (1), (2) исследовалась ранее в работе [6], в которой необходимое и достаточное условия разрешимости сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda)$ и ее весовых производных. В рассматриваемой работе получено необходимое и достаточное условие на резольвенту оператора A, которое, в отличие от [6], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее, как и в случае $k=0$, невесовых производных.

Обозначим через $C^n(I,E_0)$ пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t\in I$ функций со значениями в $E_0\subset E$.

Определение 1. Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, которая при $t\ge 0$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, при $t>0$ принимает значения, принадлежащие $D(A)$, то есть, $u(t)\in C^2(\bar{R}_+,E)\cap C(R_+,D(A))$, и удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на E коммутирующая с A операторная функция $Y_k(t)$ и числа $M\ge 1$, $\omega\ge 0$, такие, что для любого $u_0\in D(A)$ функция $Y_k(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\|Y_k(t)\|\le M\exp(\omega t), \tag{3}$$

$$\|Y_k'(t)u_0\|\le Mt\ \exp(\omega t)\,\|Au_0\|\,. \tag{4}$$

Функцию $Y_k(t)$ назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ) задачи (1), (2), а множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, при этом G_0 — множество генераторов операторной косинус-функции, а $Y_0(t)=C(t)$.

В определении 2 и в дальнейшем используется обозначение $Y'_k(t)u_0 = (Y_k(t)u_0)'$.

Приведем доказательства некоторых свойств решений задачи (1), (2), которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 1. *Пусть задача* (1), (2) *равномерно корректна, т.е.,* $A \in G_k$, *и* $u_0 \in D(A)$. *Тогда* $A \in G_m$, *т.е., эта задача равномерно корректна и для* $m > k \geq 0$, *при этом соответствующая ОФБ* $Y_m(t)$ *имеет вид*

$$Y_m(t)u_0 = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k Y_k(ts)u_0 \, ds, \tag{5}$$

где $B(a,b)$ *— бета-функция Эйлера.*

Доказательство. Тот факт, что функция $Y_m(t)u_0$ удовлетворяет уравнению

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) = Au(t) \tag{6}$$

и начальным условиям (2) установлен в [7], формула (14). Оценки

$$\|Y_m(t)\| \leq M_1 \exp(\omega t), \qquad \|Y'_m(t)u_0\| \leq M_1 \exp(\omega t) \, \|Au_0\| \,, \quad u_0 \in D(A)$$

для $Y_m(t)$, очевидно, вытекают из (3) и (4).

Доказательство единственности решения задачи (6), (2) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения задачи (6), (2). Рассмотрим функцию двух переменных $w(t,s) = f\left(Y_m(s)\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right)$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $t, s \geq 0$. Она, очевидно, является решением задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{m}{t}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{m}{s}\frac{\partial w}{\partial s}, \quad t, s > 0, \tag{7}$$

$$w(0,s) = \frac{\partial w(0,s)}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Задача (7), (8) заменой $t_1 = (t+s)^2/4$, $s_1 = (t-s)^2/4$ сводится (см. [8], §5, п. 3) к задаче, единственность которой в классе дважды непрерывно дифференцируемых при $t, s \geq 0$ функций установлена в [8] (§5, п. 2). Кроме того, требуемое нам утверждение о единственности содержится также в теореме 6.1 работы [9], в которой даже более общее уравнение нежели уравнение (7). Из полученной в [8] явной формулы для решения указанной задачи следует $w(t,s) \equiv 0$. В силу произвольности $f \in E^*$ при $s = 0$ получаем $u_1(t) \equiv u_2(t)$, и единственность решения установлена.

Таким образом, операторная функция $Y_m(t)$ удовлетворяет неравенствам вида (3), (4), а функция $Y_m(t)u_0$ является единственным решением задачи (6), (2), следовательно, задача (6), (2) равномерно корректна. Теорема доказана.

Пусть $K_\nu(z)$ — функция Макдональда или модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка ν, в дальнейшем всегда $\nu = (k-1)/2$.

Теорема 2. *Если задача* (1), (2) *равномерно корректна и* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, *то* λ^2 *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$ *и для любого* $x \in E$ *справедливо представление*

$$\lambda^{(1-k)/2} R(\lambda^2)x = \frac{2^{(1-k)/2}}{\Gamma(k/2+1/2)} \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{(k+1)/2} Y_k(t)x \, dt. \tag{9}$$

Доказательство. Заметим, что интеграл в правой части (9) можно рассматривать как K-преобразование (или преобразование Мейера) функции $t^{k/2}Y_k(t)x$, а сходимость этого интеграла вытекает из оценки (3) и асимптотического поведения функции $K_\nu(z)$ при $z \to 0$ и $z \to \infty$ (см. [10], с. 217).

Правую часть равенства (9) умноженную на $\lambda^{(k-1)/2}$ обозначим через $Q(\lambda)$ и проверим, что $(\lambda^2 I - A)Q(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda^2 I - A) = I$. Пусть Re $\lambda > \omega$ и $x \in D(A)$. Тогда

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)x = \frac{\lambda^{2+\nu}}{\Gamma(\nu+1)2^\nu} \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{\nu+1} Y_k(t)x\ dt -$$

$$-\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu+1)2^\nu} \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{\nu+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{d}{dt}\right) Y_k(t)x\ dt. \tag{10}$$

Учитывая экспоненциальный рост ОФБ $Y_k(t)$, интегрированием по частям установим соотношение

$$\int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{\nu+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{d}{dt}\right) Y_k(t)x\ dt =$$

$$= -\int_0^\infty \left(-\nu t^\nu K_\nu(\lambda t) + t^{\nu+1}\frac{d}{dt}K_\nu(\lambda t)\right) Y_k'(t)x\ dt =$$

$$= -\int_0^\infty t^{\nu+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt} - \left(\frac{\nu}{t}\right)^2\right) K_\nu(\lambda t) Y_k(t)x\ dt +$$

$$+ x \lim_{s\to 0}\left(-\nu t^\nu K\nu(\lambda t) + \lambda t^{\nu+1} K_\nu'(\lambda t)\right) =$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{\nu+1} Y_k(t)x\ dt + \lambda^{-\nu} x \lim_{s\to 0}\left(-\nu s^\nu K_\nu(s) + s^{\nu+1}K_\nu'(s)\right). \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает равенство

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)x = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \lim_{s\to 0}\left(\nu s^\nu K_\nu(s) - s^{\nu+1}K_\nu'(s)\right). \tag{12}$$

Используя определение функции $K_\nu(t)$, предел в правой части равенства (12) вычисляется, и мы приходим к равенству

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)x = x, \quad x \in D(A).$$

Поскольку в определении равномерной корректности задачи (1), (2) входит требование коммутирования операторов A и $Y_k(t)$, то равенство $Q(\lambda)(\lambda^2 I - A)x = x$, $x \in D(A)$ доказывается аналогично.

Из оценки (3) вытекает ограниченность оператора $Q(\lambda)$ при Re$\lambda > \omega$. Таким образом, при $x \in D(A)$ имеем $Q(\lambda)x = (\lambda^2 I - A)^{-1}x$.

Если $x \in E$, то в силу плотности $D(A)$ в E возьмем последовательность $x_n \in D(A)$, такую, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда, по доказанному, при $n \to \infty$ будем иметь

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)(x_n - x) \to x - (\lambda^2 I - A)Q(\lambda),$$

и требуемое равенство $Q(\lambda)x = (\lambda^2 I - A)^{-1}x$ для любого $x \in E$ вытекает из замкнутости оператора A. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть задача* (1), (2) *равномерно корректна и пусть* $Y_k(t)$ *— ОФБ для этой задачи. Тогда оператор* A *является генератором* C_0*-полугруппы* $T(t)$ *и для этой полугруппы справедливо представление*

$$T(t)x = \frac{1}{2^k\ \Gamma(k/2+1/2)\ t^{k/2+1/2}} \int_0^\infty s^k \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_k(s)x\ ds, \quad x \in E. \tag{13}$$

Доказательство. Проверим, что резольвента $R(\mu)$ оператора A удовлетворяет условиям теоремы Хилле-Иосиды (см. [11], с. 68). Из равенства (9) следует, что при $\mu > \omega^2$

$$R^n(\mu)x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}R(\mu)x =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}2^{-\nu}}{(n-1)!\;\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty \frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}(\mu^{k/4-1/4}K_\nu(\sqrt{\mu}t))t^{\nu+1}Y_k(t)x\;dt =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}2^{-\nu-n+1}}{(n-1)!\;\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(z^\nu K_\nu(z))t^{2n-1}Y_k(t)x\;dt,$$

где $z = t\sqrt{\mu}$. Учитывая известную формулу

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)(z^\nu K_\nu(z)) = (-1)^{n-1}z^{\nu-n+1}K_{\nu-n+1}(z),$$

выведем оценку для $R^n(\mu)x$. Имеем

$$\|R^n(\mu)x\| = \frac{1}{2^{n+\nu-1}(n-1)!\;\Gamma(\nu+1)\mu^{n/2-k/4}}\left\|\int_0^\infty t^{\nu+n}K_{\nu-n+1}(t\sqrt{\mu})Y_k(t)x\;dt\right\| \leq$$

$$\leq \frac{M\,\|x\|}{2^{n+\nu-1}(n-1)!\;\Gamma(\nu+1)\mu^{n/2-k/4}}\int_0^\infty t^{\nu+n-1/2}\exp\left((\omega-\sqrt{\mu})t\right)\;dt. \tag{14}$$

Вычислив полученный в (14) интеграл, придем к оценке

$$\|R^n(\mu)x\| \leq \frac{M_1(k)\Gamma(n+k/2)\,\|x\|}{2^{n+\nu-1}(n-1)!\;\Gamma(\nu+1)(\sqrt{\mu}-\omega)^{n+k/2}\mu^{n/2-k/4}}. \tag{15}$$

С учетом предельного соотношения

$$\lim_{n\to\infty}(n^{k/2}B(n,k/2)) = \Gamma(k/2),$$

из (15) выводим

$$\|R^n(\mu)\| \leq \frac{M_2(k)}{(4/3)^n B(n,k/2)(\mu-\omega_1)^n} \leq \frac{M(k)}{(\mu-\omega_1)^n}, \quad \mu > \omega_1 = \frac{9\omega^2}{8}, \quad M(k) > 0.$$

Следовательно, в силу теоремы Хилле-Иосиды, оператор A является генератором C_0-полугруппы $T(t)$.

Непосредственной проверкой, используя тот факт, что функция $Y_k(t)x$ удовлетворяет уравнению (1), можно убедиться в том, что правая часть равенства (13) является решением следующей задачи Коши

$$v'(t) = Av(t), \quad v(0) = x, \quad x \in D(A). \tag{16}$$

Действительно,

$$AT(t)x = \frac{1}{2^k\;\Gamma(k/2+1/2)\;t^{k/2+1/2}}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)AY_k(s)x\;ds =$$

$$= \frac{1}{2^k\ \Gamma(k/2+1/2)\ t^{k/2+1/2}} \int_0^\infty s^k \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left(Y_k''(s)x + \frac{k}{s}Y_k'(s)x\right) ds =$$
$$= \frac{-1}{2^k\ \Gamma(k/2+1/2)\ t^{k/2+1/2}} \int_0^\infty \left(s^k \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\right)'\ Y_k'(s)x\ ds +$$
$$+ \frac{k}{2^k\ \Gamma(k/2+1/2)\ t^{k/2+1/2}} \int_0^\infty s^{k-1} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_k'(s)x\ ds =$$
$$= \frac{1}{2^{k+1}\ \Gamma(k/2+1/2)\ t^{k/2+3/2}} \int_0^\infty s^{k+1} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_k'(s)x\ ds =$$
$$= -\frac{k+1}{2^{k+1}\ \Gamma(k/2+1/2)\ t^{k/2+3/2}} \int_0^\infty s^{k} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_k(s)x\ ds +$$
$$+ \frac{1}{2^{k+2}\ \Gamma(k/2+1/2)\ t^{k/2+5/2}} \int_0^\infty s^{k+2} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) Y_k(s)x\ ds = T'(t)x.$$

Проверим теперь, что $T(t)x$ удовлетворяет условию $T(0)x = x$. После замены переменных в правой части равенства (13) получим

$$T(0)x = \frac{1}{\Gamma(k/2+1/2)} \int_0^\infty \tau^{k/2-1/2} e^{-\tau} Y_k(0)x\ ds = \frac{x}{\Gamma(k/2+1/2)} \int_0^\infty \tau^{k/2-1/2} e^{-\tau}\ d\tau = x.$$

Отсюда, в силу теоремы единственности для решения задачи (16), и следует представление (13). Теорема доказана.

Из представления (13) следует, что полугруппа $T(t)$ может быть продолжена в операторную функцию, аналитическую в некотором секторе

$$\Xi_\varphi = \{z : |\mathrm{arg} z| < \varphi,\ \ 0 < |z| < \infty\}, \quad 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, из представления (9), подобно тому как это было сделано при доказательстве теоремы 3, может быть получена оценка

$$\|R(\mu)\| \le \frac{M_0(k)}{|\mu|+1}, \quad \mathrm{Re}\ \mu > \omega_0, \quad M_0(k) > 0, \tag{17}$$

которая является необходимым и достаточным условием аналитичности полугруппы $T(t)$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда определяемая равенством* (13) *полугруппа* $T(t)$ *может быть продолжена в операторную функцию, аналитическую в некотором секторе* Ξ_φ. *Аналитичность резольвенты и оценка* (17) *позволяют получить представление* (см. [12], с. 269)

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda)\ d\lambda, \tag{18}$$

где $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ *— контур, состоящий из лучей* $\lambda = \sigma + \rho \exp(-i\varphi),\ 0 \le \rho < \infty$ *и*

$$\lambda = \sigma + \rho \exp(i\varphi),\ 0 \le \rho < \infty, \ \ \sigma \ge \omega_0, \ \ \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{M_0(k)}.$$

В силу следствия 1 при нахождении критерия равномерной корректности задачи (1), (2) можно ограничиться классом операторов, которые являются генераторами аналитических C_0-полугрупп $T(t)$. Обозначим этот класс операторов через G. Критерии того, что $A \in G$ могут быть найдены в обзорной работе [4].

В работе [13] показано, что если $A \in G$, то при $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ для $\alpha > 0$ существует дробная степень резольвенты $R(\lambda)$, которая имеет вид

$$R^{\alpha}(\lambda)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\exp(-\lambda t)T(t)x\ dt, \quad x \in E. \tag{19}$$

Легко убедиться, что положительные дробные степени резольвенты образуют полугруппу ограниченных операторов, т.е., что имеет место равенство

$$R^{\alpha}(\lambda)R^{\beta}(\lambda) = R^{\alpha+\beta}(\lambda), \quad \alpha,\ \beta > 0. \tag{20}$$

Докажем далее следующее необходимое условие равномерной корректности задачи (1), (2).

Теорема 4. *Если задача* (1), (2) *равномерно корректна и* $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$, *то* λ^2 *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$ *оператора* A, *для дробной степени резольвенты справедливо представление*

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{1}{\Gamma(k+1)\ \lambda}\int_0^{\infty} t^k\exp(-\lambda t)Y_k(t)\ dt \tag{21}$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right)\right\| \le \frac{M\ \Gamma(k+n+1)}{(\mathrm{Re}\ \lambda-\omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, ... \tag{22}$$

Доказательство. Если задача (1), (2) равномерно корректна и $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$, то в теореме 2 установлено, что λ^2 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A. Используя равенства (19) и (13), при действительном $\lambda > \omega$ запишем представление

$$R^{\alpha}(\lambda^2)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\exp(-\lambda^2 t)T(t)x\ dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma((k+1)/2)2^k}\int_0^{\infty} s^k Y_k(s)x\left(\int_0^{\infty} t^{\alpha-k/2-3/2}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}-\lambda^2 t\right)\ dt\right)ds =$$

$$= \frac{2^{(3-k)/2-\alpha}\lambda^{(k+1)/2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma((k+1)/2)}\int_0^{\infty} s^{\alpha+(k-1)/2}K_{\alpha-(k+1)/2}(s\lambda)Y_k(s)x\ ds, \quad x \in E.$$

Следовательно, в силу формулы удвоения для гамма-функций получим

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{\sqrt{\pi}\ 2^{-k}}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)\lambda}\int_0^{\infty} s^k\exp(-\lambda s)Y_k(s)\ ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+1)\ \lambda}\int_0^{\infty} t^k\exp(-\lambda t)Y_k(t)\ dt. \tag{23}$$

Равенство (23) в силу принципа аналитичности можно распространить на область аналитичности по λ левой и правой частей, т.е. на область $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$. Таким образом, представление (21) установлено.

Учитывая оценку (3) и формулу удвоения для гамма-функций, из (21) получим

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right)\right\| \le \frac{1}{\Gamma(k+1)}\int_0^{\infty} t^{k+n}\exp(-\mathrm{Re}\ \lambda\ t)\left\|Y_k(t)\right\|\ dt \le$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(k+1)} \int_0^{\infty} t^{k+n} \exp(-\mathrm{Re}\ \lambda\ t + \omega t)\ dt = \frac{M\ \Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)\ (\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^{k+n+1}},$$

что и устанавливает справедливость неравенств (22). Теорема доказана.

Теперь покажем, что оценки (22) будут являться и достаточным условием равномерной корректности задачи (1), (2). В последующих леммах 1 – 7 мы будем предполагать, что $A \in G$ и выполнены оценки (22). Для $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ введём важную для дальнейших построений операторную функцию

$$F_k(\lambda) = \Gamma(k+1)\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2).$$

Лемма 1. *Для любого $x \in E$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)} \lim_{n\to\infty} n^{k+1} F_k(n)x = x. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $x \in D(A)$ и $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, где контуры $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ такие же как и в интеграле (18). Тогда, учитывая равенства (19) и (18), получим

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)} n^{k+1} F_k(n)x = n^{k+2} R^{1+k/2}(n^2)x = \frac{n^{k+2}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(\mu)}{(n^2-\mu)^{1+k/2}} x\ d\mu =$$

$$= \frac{n^{k+2}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{(n^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu) \frac{(\mu I - A) + A}{\mu} x\ d\mu =$$

$$= \frac{n^{k+2}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\mu(n^2-\mu)^{1+k/2}} x\ d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax\ d\mu =$$

$$= x + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax\ d\mu.$$

При этом интеграл был вычислен с помощью замыкания в левую полуплоскость контура Γ частью окружности радиуса R, интеграл по которой стремится к нулю при $R \to \infty$.

Нам осталось показать, что интеграл в последнем равенстве при $n \to \infty$ стремится к нулю. Действительно,

$$\int_\Gamma \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax\ d\mu = \int_\Gamma \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\mu}{n^2-\mu}\right)^{1+k/2} R(\mu)Ax\ d\mu =$$

$$= \int_\Gamma \frac{1}{\mu} \left(1 + (1+k/2)\,\frac{\mu}{n^2-\mu} + ... + \frac{(1+k/2)...(k/2+1-m)}{(m+1)!} \left(\frac{\mu}{n^2-\mu}\right)^{m+1} + ...\right) R(\mu)Ax\, d\mu.$$

При $m \in \mathbb{N}$ вычислим интеграл

$$\int_\Gamma \frac{\mu^m}{(n^2-\mu)^{m+1}} R(\mu)Ax\ d\mu = 2\pi i \lim_{\mu\to n^2} (\mu^m R(\mu))^{(m)} Ax =$$

$$= 2\pi i\ \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j n^{2j} R^{j+1}(n^2)Ax.$$

Полученная сумма стремится к 0 при $n \to \infty$, поскольку в силу (17) операторная функция $n^2R(n^2)$ ограничена, а $R(n^2)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Наша цель заключается в определении ОФБ $Y_k(t)$ как сильного предела некоторой последовательности. Предполагая, что $A \in G$ и выполнены оценки (22), при $k > 0$ введем в рассмотрение последовательность линейных ограниченных при каждом $t \geq 0$ операторов

$$Y_{k,n}(t) = e^{-nt} \left(I + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m!\, \Gamma(k+m+2)}\, t^{m+1} F_k^{(m)}(n) \right). \tag{25}$$

Отметим, что при $k = 0$ аналогичная последовательность была использована в [15].

Из неравенства (22) следует, что ряд в (25) сходится равномерно по t в любом ограниченном интервале и, кроме того, для $t \geq 0$

$$\|Y_{k,n}(t)\| \leq M_1\, e^{\omega_1 t}, \quad \omega_1 > \omega. \tag{26}$$

Действительно,

$$\|Y_{k,n}(t)\| \leq e^{-nt} \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^{k+2m+2}\, t^{m+1}}{m!\, \Gamma(k+m+2)} \cdot \frac{M\, \Gamma(k+m+1)}{(n-\omega)^{k+m+1}} \right) \leq$$

$$\leq e^{-nt} \left(1 + M \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^{k+2m+2}\, t^{m+1}}{(m+1)!\, (n-\omega)^{k+m+1}} \right) \leq M_2\, e^{-nt} \exp\left(\frac{n^2 t}{n-\omega} \right) \leq M_1\, e^{\omega_1 t},$$

что и доказывает справедливость неравенства (26). Аналогично доказывается и дифференцируемость $Y_{k,n}(t)$ в пространстве линейных ограниченных операторов.

Таким образом, к $t^k Y_{k,n}(t)$ можно применить преобразование Лапласа. Обозначим

$$F_{k,n}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^k Y_{k,n}(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}\, \lambda > \omega_1, \tag{27}$$

при этом в силу дифференцируемости $Y_{k,n}(t)$ справедлива формула обращения

$$t^k Y_{k,n}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} F_{k,n}(\lambda)\, d\lambda, \quad \sigma > \omega_1. \tag{28}$$

Лемма 2. *Для любого $x \in D(A)$ существует сильный предел последовательности $Y_{k,n}(t)$, и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} t^k Y_{k,n}(t) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda) x\, d\lambda, \quad \sigma > \omega_1. \tag{29}$$

Доказательство. Докажем вначале, что интеграл

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda) x\, d\lambda \tag{30}$$

имеет смысл для $x \in D(A)$. Действительно, с учетом формулы (18) будем иметь

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda) x\, d\lambda = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} \left(\frac{x}{\lambda^{k+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda}{\mu(\lambda^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu) A x\, d\mu \right) d\lambda.$$

Далее оценим интеграл

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda}{\mu(\lambda^2 - \mu)^{1+k/2}} R(\mu) A x\, d\mu \right) d\lambda,$$

учитывая оценку (17) и очевидное неравенство

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda^2-\mu|^{1+k/2}} \le \frac{C_0}{|\lambda|^{1+k}}$$

справедливое для $\mathrm{Re}\ \lambda = \sigma$, $\mathrm{Re}\ \mu = \omega_1 > \sigma$, при этом $|\lambda^2-\mu| > \delta > 0$. Получим

$$\left|\left|\int_\Gamma \frac{\lambda}{\mu(\lambda^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax\ d\mu\right|\right| \le \frac{M||Ax||}{|\lambda|^{k+1}} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{ds}{|\mu|(|\mu|+1)} + \int_{\Gamma_2} \frac{ds}{|\mu|(|\mu|+1)}\right) =$$

$$= \frac{2M||Ax||}{|\lambda|^{k+1}} \int_{\sigma_0}^\infty \frac{ds}{s(s+1)} = \frac{2M||Ax||}{|\lambda|^{k+1}} \ln\left(1+\frac{1}{\sigma_0}\right), \quad \sigma_0 > \omega_1,$$

следовательно,

$$\left\|\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x\ d\lambda\right\| \le \frac{Me^{\sigma t}\ln\left(1+\sigma_0^{-1}\right)\|Ax\|}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\tau}{(\sigma^2+\tau^2)^{1/2+k/2}} =$$

$$= \frac{MB(1/2,k/2)e^{\sigma t}\ln\left(1+\sigma_0^{-1}\right)\|Ax\|}{\pi\sigma^k},$$

и рассматриваемый интеграл (30) существует.

Мы хотим показать, что для $x \in D(A)$ имеет место равенство (29). Отметим вначале, что справедливо равенство

$$F_{k,n}(\lambda) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\ I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}}\ F_k\left(\frac{\lambda n}{n+\lambda}\right). \tag{31}$$

Действительно, из (27) и (25) выводим

$$F_{k,n}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k Y_{k,n}(t)\ dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\lambda+n)t}\left(t^k\ I + \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m!\ \Gamma(k+m+2)}\ t^{k+m+1} F_k^{(m)}(n)\right)\ dt =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\ I + \sum_{m=0}^\infty \left((-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m!\ \Gamma(k+m+2)} \int_0^\infty t^{k+m+1} e^{-(\lambda+n)t}\ dt\ F_k^{(m)}(n)\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\ I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{n^2}{n+\lambda}\right)^m F_k^{(m)}(n)\right) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\ I+$$

$$+\frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda n}{n+\lambda}-n\right)^m F_k^{(m)}(n)\right) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\ I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}}\ F_k\left(\frac{\lambda n}{n+\lambda}\right),$$

что и доказывает (31).

При каждом $\lambda :\ \mathrm{Re}\ \lambda = \sigma > \omega_1$, из соотношения (31) вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\ I\right) = F_k(\lambda). \tag{32}$$

Чтобы перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве (28) покажем, что справедливо неравенство

$$\left\| F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\; I \right\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|^{k+1}}, \quad k > 0. \tag{33}$$

Для доказательства (33) воспользуемся представлением (31) и вытекающей из (17) оценкой $\|F_k(\lambda)\| \leq M_0\; |\lambda|^{-k-1}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0 > 0$, $k > 0$. Имеем

$$\left\| F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\; I \right\| = \left\| \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}}\; F_k\left(\frac{\lambda n}{n+\lambda}\right) \right\| \leq M_0 \left| \frac{n}{n+\lambda} \right|^{k+2} \left| \frac{n+\lambda}{\lambda n} \right|^{k+1} \leq \frac{M_1}{|\lambda|^{k+1}},$$

что и доказывает (33).

Из (32), (33) следует, что при $x \in D(A)$ можно перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве

$$t^k Y_{k,n}(t)x - t^k e^{-nt}x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t}\left(F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\; I \right) x\; d\lambda, \quad \sigma > \omega_1 > 0,$$

и мы приходим к равенству (29). Лемма доказана.

Как следует из неравенства (26), последовательность $Y_{k,n}(t)$ равномерно по n ограничена и по лемме 2 сильно сходится на плотном в E множестве $D(A)$. В силу теоремы Банаха-Штейнгауза уже для любого $x \in E$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} Y_{k,n}(t)x = Y_k(t)x. \tag{34}$$

При этом определяемая равенством (34) операторная функция $Y_k(t)$ обладает следующими свойствами:

$$Y_k(0) = I, \tag{35}$$

$$\|Y_k(t)\| \leq M_1\; e^{\omega_1 t}, \quad \omega_1 > \omega > 0. \tag{36}$$

Стало быть, к операторной функции $t^k Y_k(t)$ можно применить преобразование Лапласа и, учитывая (26), (31) и (36), из (27) получим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k Y_k(t)\; dt = F_k(\lambda), \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega_1. \tag{37}$$

Лемма 3. *Равенство* (29) *справедливо для любого* $x \in E$, *если интеграл в правой части* (29) *существует.*

Доказательство. Действительно, если интеграл в правой части (29) существует, то положив $x_n = \Gamma^{-1}(k+1)n^{k+1}F_k(n)x \in D(A)$, в силу леммы 2 получим

$$t^k Y_k(t)x_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x_n\; d\lambda = \frac{n^{k+1}F_k(n)}{2\pi i\; \Gamma(k+1)}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x\; d\lambda. \tag{38}$$

Учитывая равенство (24) из леммы 1, после перехода к пределу в (38), получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 4. *Равенство* $AY_k(t)x = Y_k(t)Ax$ *справедливо для любого* $x \in D(A)$.

Доказательство. Поскольку $F_k(n) = \Gamma(k+1)nR^{1+k/2}(n^2)$, то, очевидно, $F_k(n) \in D(A)$ и $AF_k(n)x = F_k(n)Ax$.

По индукции для $m = 1, 2, ...$ имеем $F_k^{(m)}(n) \in D(A)$ и $AF_k^{(m)}(n)x = F_k^{(m)}(n)Ax$. Следовательно, из (25) следует, что $Y_{k,n}(t)x \in D(A)$ и $AY_{k,n}(t)x = Y_{k,n}(t)Ax$, и, в силу замкнутости оператора A, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для определяемой равенствами* (34), (25) *операторной функции* $Y_k(t)$ *справедливо соотношение*

$$k\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t s^{k-1}Y_k(s)\,dsdt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda}R^{k/2}(\lambda^2), \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_1.$$

Доказательство. Свойства изображение интеграла и интегрирование изображения для преобразования Лапласа, а также соотношение (37) позволяют записать равенства

$$k\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t s^{k-1}Y_k(s)\,ds\,dt = \frac{k}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{k-1}Y_k(t)\,dt = \frac{k}{\lambda}\int_\lambda^\infty F_k(z)\,dz =$$

$$= \frac{k\,\Gamma(k+1)}{\lambda}\int_\lambda^\infty zR^{1+k/2}(z^2)\,dz = \frac{k\,\Gamma(k+1)}{2\lambda}\int_{\lambda^2}^\infty R^{1+k/2}(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= -\frac{\Gamma(k+1)}{\lambda}R^{k/2}(\zeta)\Big|_{\lambda^2}^\infty = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda}R^{k/2}(\lambda^2), \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_1.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $x \in D(A)$, *тогда для определяемой равенствами* (34), (25) *операторной функции* $Y_k(t)$ *справедливо соотношение*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^kY_k(t)Ax\,dt = \lambda^2F_k(\lambda)x - \Gamma(k+1)\lambda R^{k/2}(\lambda^2)x, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_1.$$

Доказательство. В силу леммы 4 и равенств (37), (20) имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^kAY_k(t)x\,dt = F_k(\lambda)Ax = \Gamma(k+1)\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)Ax =$$

$$= -\Gamma(k+1)\left(\lambda R^{k/2}(\lambda^2)R(\lambda^2)(-\lambda^2I + \lambda^2I - A\right)x = \lambda^2F_k(\lambda)x - \Gamma(k+1)\lambda R^{k/2}(\lambda^2)x,$$

и лемма доказана.

Следующая лемма 7 является непосредственным следствием лемм 3, 5 и 6.

Лемма 7. *Пусть* $x \in D(A)$, *тогда для определяемой равенствами* (34), (25) *операторной функции* $Y_k(t)$ *справедливо соотношение*

$$\int_0^t\int_0^\tau s^kY_k(s)Ax\,ds\,d\tau = t^kY_k(t)x - k\int_0^t s^{k-1}Y_k(s)x\,ds. \tag{39}$$

Доказательство. Действительно, в силу леммы 6 справедливо равенство

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^kAY_k(t)x\,dt + \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda}R^{k/2}(\lambda^2)x = F_k(\lambda)x, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_1,$$

из которого, учитывая леммы 3 и 5, выводим требуемое соотношение (39). Лемма доказана.

С помощью доказанных лемм 1 – 7 установим достаточное условие равномерной корректности задачи (1), (2). Напомним, что требования, обеспечивающие равномерную корректность, приведены в определении 2.

Теорема 5. *Пусть $A \in G$ и выполнены оценки* (22). *Тогда задача* (1), (2) *равномерно корректна и при этом ОФБ $Y_k(t)$ определяется равенствами* (34), (25), *в частности, на элементах из области определения оператора A она имеет вид*

$$Y_k(t)u_0 = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i\ t^k} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)u_0\ d\lambda, \quad u_0 \in D(A), \quad \sigma > \omega. \tag{40}$$

Доказательство. Нам осталось проверить, что построенная с помощью равенств (34), (25) операторная функция $Y_k(t)$, удовлетворяет всем требованиям определения 2.

Из установленного в лемме 7 равенства (39) выводим равенства

$$\int_0^t s^k Y_k(s)Au_0\ ds\ = t^k Y_k'(t)u_0, \tag{41}$$

$$t^k Y_k(t)Au_0 = kt^{k-1}Y_k'(t)u_0 + t^k Y_k''(t)u_0,$$

следовательно, $Y_k(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). Равенство (35) обеспечивает выполнение начального условия (2). Единственность же построенного решения задачи (1), (2) фактически доказана в теореме 1, если положить $w(t,s) = f\left(Y_k(s)\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right)$.

Операторная функция $Y_k(t)$ коммутирует с оператором A (лемма 4). Ее оценка вида (3) установлена в (36), а оценка вида (4) вытекает из (41) и (36).

Таким образом, операторная функция $Y_k(t)$ является ОФБ для задачи (1), (2), а задача (1), (2) равномерно корректна. Завершая доказательство теоремы, укажем, что равенство (40) установлено в лемме 2. Теорема доказана.

Доказанные теоремы 4 и 5 объединяются в следующий критерий.

Теорема 6 (критерий равномерной корректности). *Пусть оператор A является генератором аналитической C_0-полугруппы. Для того чтобы задача* (1), (2) *была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых постоянных $M \geq 1,\ \omega \geq 0$ число λ^2 с $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ принадлежало резольвентному множеству оператора A и для дробной степени резольвенты оператора A были выполнены оценки*

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right)\right\| \leq \frac{M\ \Gamma(k+n+1)}{(\mathrm{Re}\ \lambda-\omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, ... \tag{42}$$

Установим далее еще некоторые свойства ОФБ $Y_k(t)$.

Лемма 8. *Пусть $u_0 \in D(A)$, тогда для ОФБ $Y_k(t)$ справедливо соотношение*

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}(t)Au_0, \tag{43}$$

Доказательство. Пусть $u_0 \in D(A^2)$, тогда, учитывая (41), непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция $h(t) = \dfrac{1}{t}Y_k'(t)u_0$ является решением уравнения

$$h''(t) + \frac{k+2}{t}h'(t) = Ah(t), \quad t > 0, \tag{44}$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}Y_k'(t)u_0 = \frac{1}{k+1}Au_0, \quad \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}Y_k'(t)u_0\right)' = 0, \quad u_0 \in D(A). \tag{45}$$

Действительно,

$$h'(t) = \frac{1}{t} Y_k(t) A u_0 - \frac{k+1}{t^{k+2}} \int_0^t s^k Y_k(s) A u_0 \, ds, \tag{46}$$

$$h''(t) = \frac{1}{t} Y_k'(t) A u_0 - \frac{2k+2}{t^2} Y_k(t) A u_0 - \frac{(k+1)(k+2)}{t^{k+3}} \int_0^t s^k Y_k(s) A u_0 \, ds, \tag{47}$$

и из (46), (47) выводим (44).

Первое из равенств (45) очевидно, в силу (41). А второе вытекает из (46), поскольку

$$h'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{k+2}} \left(t^{k+1} Y_k(t) A u_0 - (k+1) \int_0^t s^k Y_k(s) A u_0 \, ds \right) = \lim_{t\to 0} \frac{Y_k'(t) A u_0}{k+2} = 0.$$

На основании теоремы о единственности решения задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, мы приходим к равенству (43), которое справедливо пока для $u_0 \in D(A^2)$.

Если $u_0 \in D(A)$, то, применяя доказанное утверждение к элементу $w_0 = R(\mu^2) u_0$, $\mu > \omega$, мы установим справедливость равенства (43) уже для $u_0 \in D(A)$.

Отметим также, что из (43) вытекает и равенство

$$\lim_{t\to 0} Y_k''(t) u_0 = \frac{1}{k+1} A u_0, \quad u_0 \in D(A). \tag{48}$$

Равенство (48) определяет второй производящий оператор ОФБ $Y_k(t)$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть задача* (1), (2) *равномерно корректна и* $Y_k(t)$ *является соответствующей ОФБ. Тогда имеет место равенство*

$$Y_k(t) Y_k(s) = T_s^t Y_k(s),$$

где оператор обобщенного сдвига T_s^t, *соответствующий уравнению* (1), *определяется равенством* (*см.* [8])

$$T_s^t H(s) = \frac{1}{B(k/2, 1/2)} \int_0^\pi H\left(\sqrt{s^2 + t^2 - 2st\cos\varphi}\right) \sin^{k-1}\varphi \, d\varphi.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию двух переменных $w(t,s) = f\left(Y_k(t) Y_k(s) u_0\right)$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $t, s \geq 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{k}{s}\frac{\partial w}{\partial s}, \quad t, s > 0$$

и условиям

$$w(0,s) = f\left(Y_k(s) u_0\right), \quad \frac{\partial w(0,s)}{\partial t} = 0.$$

Полученная задача в классе дважды непрерывно дифференцируемых при $t, s \geq 0$ функций рассматривалась в [8] (§ 5, п. 2). Из установленной в [8] явной формулы для решения указанной задачи получаем $w(t,s) = T_s^t f\left(Y_k(s) u_0\right) = f\left(T_s^t Y_k(s) u_0\right)$, откуда, в силу произвольности $f \in E^*$ и вытекает требуемое равенство. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $m > 0$ и $E = L^2_{x^m}(0,\infty)$ — гильбертово пространство комплексно-значных функций $v(x)$, $x \in (0,\infty)$, интегрируемых в квадрате с весом x^m и с нормой

$$\|v(x)\|^2 = \int_0^\infty x^m \, |v(x)|^2 \, dx.$$

Рассмотрим введенное в [16] множество

$$S = \left\{ v(x) \in C^{\infty}(-\infty, \infty),\ v(-x) = v(x),\ \left| v^{(n)}(x) \right| \le \frac{M_n}{(1+x^2)^N} \right\},$$

где $n \ge 0,\ N \ge 0$ — произвольные целые числа, M_n — постоянные, не зависящие от x, и оператор A определим дифференциальным выражением Бесселя

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{d}{dx} \tag{49}$$

на функциях из множества S, рассматриваемых на $[0, \infty)$. Очевидно, $\overline{D(A)} = L^2_{x^m}(0, \infty)$, и оператор A является симметрическим полуограниченным сверху оператором, т.е. $(Av, v) \le 0$. По теореме Фридрихса его замыкание $\overline{A}$ — уже самосопряженный оператор.

Следуя [8], [16], на функциях из множества S определим преобразование Фурье-Бесселя по формулам

$$\hat{v}(s) = \int_0^{\infty} x^{2p+1}\ j_p(sx)\ v(x)\ dx, \tag{50}$$

$$v(x) = \gamma_p \int_0^{\infty} s^{2p+1}\ j_p(sx)\ \hat{v}(s)\ ds, \tag{51}$$

$$m = 2p+1,\ \gamma_p = \frac{1}{2^{2p}\ \Gamma^2(p+1)},\ j_p(x) = \frac{2^p\ \Gamma(p+1)}{x^p}\ J_p(x),$$

где $J_p(x)$ — функция Бесселя. Множество S инвариантно относительно взаимнооднозначного преобразования Фурье-Бесселя.

У оператора $\overline{A}$ при $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$ существует резольвента $R(\lambda)$, определяемая равенством

$$R(\lambda)v(x) = \gamma_p \int_0^{\infty} \frac{s^{2p+1}}{s^2+\lambda}\ j_p(sx)\ \hat{v}(s)\ ds, \qquad v(x) \in L^2_{x^{2p+1}}(0, \infty),$$

и в силу равенства Парсеваля справедлива оценка

$$\|R(\lambda)v(x)\|^2 = \gamma_p^2 \int_0^{\infty} s^{2p+1} \frac{|\hat{v}(s)|^2}{|s^2+\lambda|^2}\ ds \le \frac{\gamma_p^2}{|\lambda|^2} \|\hat{v}(s))\|^2 = \frac{\gamma_p^2}{|\lambda|^2} \|v(x))\|^2,\quad \mathrm{Re}\ \lambda > 0.$$

Следовательно, оператор $\overline{A} \in G$, т.е., является генератором аналитической полугруппы, для которой справедливы представления

$$T_{2p+1}(t)v(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda)v(x)\ d\lambda = \frac{\gamma_p}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} e^{\lambda t} \left(\int_0^{\infty} \frac{s^{2p+1}}{s^2+\lambda} j_p(sx)\hat{v}(s)\ ds \right) d\lambda =$$

$$= \gamma_p \int_0^{\infty} s^{2p+1} j_p(sx)\hat{v}(s) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{s^2+\lambda}\ d\lambda \right) ds = \gamma_p \int_0^{\infty} \exp(-s^2 t) s^{2p+1} j_p(sx)\hat{v}(s)\ ds =$$

$$= \gamma_p^2 \int_0^{\infty} \exp(-s^2 t) s^{2p+1} j_p(sx) \left(\int_0^{\infty} \tau^{2p+1} j_p(s\tau) v(\tau)\ d\tau \right)\ ds =$$

$$= \frac{1}{x^p} \int_0^{\infty} \tau^{p+1} v(\tau) \left(\int_0^{\infty} s\ \exp(-s^2 t) J_p(sx) J_p(s\tau)\ ds \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2t\ x^p} \int_0^{\infty} \tau^{p+1} \exp\left(-\frac{x^2+\tau^2}{4t} \right) I_p\left(\frac{x\tau}{2t} \right) v(\tau)\ d\tau, \tag{52}$$

при этом мы использовали интеграл 2.12.39.3 [17], где $I_p(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя.

Покажем, что для резольвенты оператора $\overline{A}$ выполнены оценки (42). С помощью (19) и (52), запишем

$$R^{1+k/2}(\lambda^2)v(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2+1)} \int_0^\infty t^{k/2} \exp(-\lambda^2 t) T_{2p+1}(t) v(x)\, dt =$$

$$= \frac{\gamma_p}{\Gamma(k/2+1)} \int_0^\infty t^{k/2} \exp(-\lambda^2 t) \int_0^\infty \exp(-s^2 t) s^{2p+1} j_p(sx) \hat{v}(s)\, ds dt =$$

$$= \gamma_p \int_0^\infty \frac{s^{2p+1}}{(s^2+\lambda^2)^{1+k/2}} j_p(sx)\hat{v}(s)\, ds, \quad v(x) \in L^2_{x^{2p+1}}(0,\infty).$$

Далее в силу равенства Парсеваля при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ справедливо представление

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right) v(x) \right\|^2 = \gamma_p^2 \int_0^\infty s^{2p+1} \left| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\frac{\lambda}{(s^2+\lambda^2)^{1+k/2}} \right) \right|^2 |\hat{v}(s)|^2\, ds. \tag{53}$$

Дифференцируя по λ равенство (см. [17] 2.12.8.4)

$$\frac{\lambda}{(s^2+\lambda^2)^{1+k/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(2s)^{(k-1)/2}\Gamma(k/2+1)} \int_0^\infty t^{(k+1)/2} e^{-\lambda t} J_{(k-1)/2}(ts)\, dt,$$

получим

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\frac{\lambda}{(s^2+\lambda^2)^{1+k/2}} \right) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2(2s)^{(k-1)/2}\Gamma(k/2+1)} \int_0^\infty t^{(k+1)/2+n} e^{-\lambda t} J_{(k-1)/2}(ts)\, dt. \tag{54}$$

Учитывая равенство (54), из (53) получим оценку

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right) v(x) \right\|^2 \le \frac{\pi\ \gamma_p^2}{2^{k+1}\ \Gamma^2(k/2+1)} \quad \times$$

$$\times \quad \int_0^\infty s^{2p-k+2} \left| \int_0^\infty t^{(k+1)/2+n} e^{-\lambda t} J_{(k-1)/2}(ts)\, dt \right|^2 |\hat{v}(s)|^2\, ds =$$

$$= \frac{\pi\ \gamma_p^2}{2^{k+1}\ \Gamma^2(k/2+1)} \int_0^\infty s^{2p-2k-2n-1} \left| \int_0^\infty \tau^{k+n} e^{-\lambda t/s} \tau^{(1-k)/2} J_{(k-1)/2}(\tau)\, d\tau \right|^2 |\hat{v}(s)|^2\, ds \le$$

$$\le \frac{M_0\ \pi\ \gamma_p^2}{2^{k+1}\ \Gamma^2(k/2+1)} \int_0^\infty s^{2p-2k-2n-1} \left| \int_0^\infty \tau^{k+n} e^{-\lambda t/s}\, d\tau \right|^2 |\hat{v}(s)|^2\, ds \le$$

$$\le \frac{M_1\ \Gamma^2(k+n+1)}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^{2(k+n+1)}} \|v(x)\|^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2, ...$$

Таким образом, оценки (42) имеют место и для рассматриваемого оператора $\overline{A}$ справедлива теорема 6 и $\overline{A} \in G_k$ для любого $k \ge 0$.

В частности, $\overline{A} \in G_0$ и соответствующая КОФ при $\sigma > 0$ имеет вид

$$C(t)v(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} e^{\lambda t}\ \lambda\ R(\lambda^2) v(x)\, d\lambda =$$

$$= \frac{\gamma_p}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda e^{\lambda t}\int_0^\infty \frac{s^{2p+1}}{s^2+\lambda^2} j_p(sx)\hat{v}(s)\ dsd\lambda = \gamma_p\int_0^\infty s^{2p+1} j_p(sx)\cos st\ \hat{v}(s)\ ds.$$

А для нахождения $Y_k(t)$ удобно использовать равенство (5), доказанное в теореме 1. При $k>0$ справедливо представление

$$Y_k(t)v(x) = \frac{2}{B(1/2,k/2)}\int_0^1 (1-\tau^2)^{k/2-1}C(t\tau)v(x)\ d\tau =$$

$$= \frac{2}{B(1/2,k/2)}\int_0^1 (1-\tau^2)^{k/2-1}\gamma_p\int_0^\infty s^{2p+1}j_p(sx)\cos st\tau\ \hat{v}(s)\ dsd\tau =$$

$$= \gamma_p\int_0^\infty s^{2p+1}j_p(sx)\ j_{(k-1)/2}(st)\ \hat{v}(s)\ ds.$$

Пример 2. Пусть $m>0$ и $E = L^2_{x^m}\left(R_2^+\right)$ — гильбертово пространство комплекснозначных функций $v(x,y)$, $(x,y)\in R_2^+$, интегрируемых в квадрате с весом x^m и с нормой

$$\|v(x,y)\|^2 = \int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty x^m\ |v(x,y)|^2\ dxdy.$$

Рассмотрим множество

$$S_2 = \left\{ v(x,y)\in C^\infty\left(R_2\right),\ v(-x,y)=v(x,y),\ \left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial^j}{\partial y^j}v(x,y)\right| \le \frac{M_{n,j}}{(1+x^2+y^2)^N}\right\},$$

где $n,\ j\ge 0,\ N\ge 0$ — произвольные целые числа, $M_{n,j}$ — постоянные, не зависящие от $x,\ y$, и оператор A определим дифференциальным выражением

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{x}\frac{\partial}{dx} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

на функциях из множества S_2, рассматриваемых на R_2^+. Очевидно, $\overline{D(A)} = L^2_{x^m}\left(R_2^+\right)$, и оператор A является симметрическим полуограниченным сверху оператором, т.е. $(Av,v)\le 0$. По теореме Фридрихса его замыкание $\overline{A}$ — уже самосопряженный оператор.

Помимо преобразования Фурье-Бесселя (49), (50), на функциях из множества S_2 определим преобразование Фурье (по переменной y) по формулам

$$\tilde{w}(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\xi y}\ w(x,y)\ dy,\quad w(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{i\xi y}\ \tilde{w}(x,\xi)\ d\xi.$$

Преобразования Фурье-Бесселя и Фурье взаимнооднозначно отображают S_2 на S_2. У оператора $\overline{A}$ при $\mathrm{Re}\ \lambda>0$ существует резольвента $R(\lambda)$, определяемая равенством

$$R(\lambda)v(x,y) = \frac{\gamma_p}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{i\xi y}\ \frac{s^{2p+1}}{s^2+\xi^2+\lambda}\ j_p(xs)\tilde{\hat{v}}(s,\xi)\ dsd\xi,$$

и при этом в силу равенства Парсеваля справедлива оценка

$$\|R(\lambda)v(x,y)\|^2 \le \frac{\gamma_p^2}{|\lambda|^2}\|v(x,y)\|^2,\quad \mathrm{Re}\ \lambda>0.$$

Следовательно, оператор $\overline{A} \in G$, т.е. является генератором аналитической полугруппы

$$T_{2p+1}(t)v(x,y) = \frac{\gamma_p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-s^2 t - \xi^2 t + i\xi y)\ s^{2p+1}\ j_p(sx)\ \tilde{\hat{v}}(s,\xi)\ dsd\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{2}\ t\sqrt{t}\ x^p} \int_0^{\infty} \tau^{p+1} \exp\left(-\frac{x^2+\tau^2}{4t}\right) I_p\left(\frac{x\tau}{2t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\eta-y)^2}{4t}\right) v(\tau,\eta)\ d\eta d\tau.$$

Аналогично примеру 1 устанавливаются оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right) v(x) \right\|^2 \le \frac{M_1\ \Gamma^2(k+n+1)}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^{2(k+n+1)}} \|v(x)\|^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2, ...,$$

следовательно, $\overline{A} \in G_k$ для любого $k \ge 0$ и при этом

$$C(t)v(x,y) = \frac{\gamma_p}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{i\xi y} s^{2p+1} j_p(sx) \cos\left(t\sqrt{s^2+\xi^2}\right)\ \tilde{\hat{v}}(s,\xi)\ dsd\xi,$$

$$Y_k(t)v(x,y) = \frac{\gamma_p}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{i\xi y} s^{2p+1} j_p(sx)\ j_{(k-1)/2}\left(t\sqrt{s^2+\xi^2}\right)\ \tilde{\hat{v}}(s,\xi)\ dsd\xi.$$

Пример 3. Пусть $E = L_\infty(0,\infty)$ — пространство измеримых функций $v(x)$ переменной $x \in (0,\infty)$ с нормой $\|v(x)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{(0,\infty)} |v(x)|$.

Оператор A определим дифференциальным выражением Бесселя (49) при $m = 2$ на рассматриваемых на полуоси $[0,\infty)$ четных функциях $v(x)$ из $L_\infty(-\infty,\infty)$ и таких, что $v''(x) + 2/x\ v'(x) \in E$. Тогда A — замкнутый оператор с плотной областью определения и, как уже отмечалось при доказательстве теоремы 7, задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad t,\ x > 0, \quad u(0,x) = v(x), \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(t,x) = T_x^t v(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} v\left(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}\right)\sin\varphi\ d\varphi.$$

Функция $u(t,x)$ при каждом $t \ge 0$ принадлежит E и справедливы оценки (3), (4) с постоянной $\omega = 0$, следовательно, оператор $A \in G_2$. Покажем, что оператор A не яляется генератором КОФ, т.е. $A \notin G_0$. Действительно, единственным решением задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad t,\ x > 0, \quad u(0,x) = v(x) \in D(A), \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0$$

является функция

$$u(t,x) = \frac{(x+t)v(x+t) + (x-t)v(x-t)}{2x} = \frac{v(x+t)+v(x-t)}{2} + \frac{t}{2x}\int_{t-x}^{t+x} v'(s)\ ds. \qquad (55)$$

Очевидно, для определяемой равенством (55) функции $u(t)$ оценка вида (3) при $k = \omega = 0$ не справедлива и, стало быть, $A \notin G_0$. На основании данного примера можно утверждать, что утверждение, обратное теореме 1, вообще говоря, не верно, т.е. для $k > 0$ вложение $G_0 \subset G_k$ строгое.

Список литературы

[1] *Fattorini H.O.* Ordinary differential equations in linear topological space, II // J. Different. Equat. 1969. V. 6. P. 50 – 70.

[2] *Sova M.* Cosine operator functions // Rozpr. mat. 1966. № 49. P. 1 – 47.

[3] *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, Выща школа. 1989.

[4] *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. ВИНИТИ. 1990. Т. 28. С. 87 – 202.

[5] *Васильев В.В., Пискарев С.И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций // http://www.srcc.msu.su/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2ru.pdf

[6] *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя // ДАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 587 – 589.

[7] *Глушак А.В.* Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Математ. заметки. 1999. Т. 66, вып. 3. С. 364 – 371.

[8] *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т.1, вып. 2(42). С. 102 – 143.

[9] *Bragg L.R.* Fundamental solutions and properties of solutions of the initial value radial Euler-Poisson-Darboux // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 607 – 616.

[10] *Земанян А.Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука. 1974.

[11] *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука. 1967.

[12] *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966.

[13] *Fattorini H.O.* A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions. Pacific J. Math. 1983. V.109, № 2. P. 335 – 347.

[14] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука. 1986.

[15] *Da Prato G., Iannelli M.* Linear integro-differential equations in banach spaces. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1980. V. 62. P. 207 – 219.

[16] *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 2. С. 299 – 310.

[17] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука. 1983.