2.7. Problema de Herinelto Casimiro: critério de verificação do produto da multiplicação de duas matrizes quadradas não usando a matriz inversa

Um dos teoremas da aritmética relacionada com a multiplicação de dois números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ do conjunto dos números reais, afirma que o resultado da multiplicação destes números é um certo número $\boldsymbol{c}$ do conjunto dos números reais.

Pergunta: como verificar que o resultado da multiplicação destes dois números está correto?

Existe um método de verificação. Este método chama-se *inverso da operação*, isto é, se o número $\boldsymbol{a}$ multiplicar com $\boldsymbol{b}$, o resultado da multiplicação será o número $\boldsymbol{c}$. Então a divisão do número $\boldsymbol{c}$ com $\boldsymbol{b}$ tem que ser igual ao número $\boldsymbol{a}$:

$$a \times b = c \rightarrow c \div b = a.$$

Ex.1:

$$2 \times 3 = 6 \rightarrow 6 \div 3 = 2.$$

Conclusão: Multiplicação foi feita corretamente

Será que esta operação de verificação também funciona na aritmética matricial? Para as outras operações: adição e subtração de duas matrizes de tamanhos iguais o método da operação inversa funciona. Será que pode-se utilizar este método na multiplicação de matrizes? Vamos na prática: se duas matrizes A e B, quando multiplicados obtém-se uma certa matriz C, logo seria válida a expressão:

$$(A) \times (B) = (C); \text{então: } (C) \div (B) = (A).$$

Mas a divisão nas operações sobre matrizes não existe. Contradição!

Ex.2:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$(A) \cdot (B)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\3 & 2\end{pmatrix}$$

Logo:

$$\begin{pmatrix}5 & 10\\3 & 2\end{pmatrix}\div\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & 5\\3 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

Logo podemos concluir que:

$$(A)\times(B)=(C);(C)\div(B)\neq(A).$$

Pergunta: como pode-se saber que o produto da multiplicação destas duas matrizes é verdadeiro?

Eu sugiro o seguinte critério de verificação: *duas matrizes A e B, o produto da multiplicação dos seus determinantes é igual ao determinante do produto da multiplicação das ambas matrizes.*

$$detA\times detB=det|A\times B|$$

Ou

$$\Delta A\times\Delta B=|A\times B|$$

Ou ainda

$$|A|\times|B|=|A\times B|$$

$$\downarrow$$

$$detA\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\times detB\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=det\left|\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right|$$

Prova:

Dadas matrizes A , B:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

Multiplicando, teremos:

$$A \times B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante, teremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{a_{11}b_{11}.a_{21}b_{12}} + a_{12}b_{21}.a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}.a_{22}b_{22} + \cancel{a_{12}b_{21}.a_{22}b_{22}} -$$

$$\cancel{-a_{11}b_{12}.a_{21}b_{11}} - a_{12}b_{22}.a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}.a_{22}b_{21} - \cancel{a_{12}b_{22}.a_{22}b_{21}}$$

$$\downarrow$$

$$a_{11}b_{11}.a_{22}b_{22} - a_{12}b_{22}.a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}.a_{22}b_{21} + a_{12}b_{21}.a_{21}b_{12}$$

Logo:

$$\Delta A \times \Delta B = |A \times B|.$$

Ex.3:

Será que a matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

considera-se o Produto verdadeiro da multiplicação das matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar utilizando o critério de **Herinelto Casimiro** de verificação do produto da multiplicação destas duas matrizes quadradas:

$$detA\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{vmatrix} \times detB\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{vmatrix} = det\left|\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}\right|$$

$$\downarrow$$

$$-2 \times 10 = \begin{vmatrix}5 & 10\\3 & 2\end{vmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$-20 = -20.$$

Conclusão:

$$\begin{pmatrix}5 & 10\\3 & 2\end{pmatrix},$$

considera-se o produto verdadeiro da multiplicação das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$$

Nota: Este método de verificação funciona com as matrizes quadradas de qualquer tamanho.

Com ajuda da matriz inversa, podemos verificar de seguinte modo:

a) Como a multiplicação de duas matrizes é feita multiplicando as linhas com as colunas, então neste caso temos que calcular a inversa de uma das matrizes: A^{-1} ou B^{-1};

b) A matriz produto C deve multiplicar com a matriz inversa, que será igual a matriz A caso calcularmos a inversa da matriz B e será igual a matriz B caso calcularmos a inversa da matriz A.

Concretamente, temos:

$$A \times B = C$$

$$\downarrow$$

$$A \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$$

Sabendo que:

$$B \cdot B^{-1} = E$$

Teremos:

$$A \cdot E = C \cdot B^{-1}$$

Sabendo ainda que:

$$A \cdot E = A$$

Então teremos:

$$\boldsymbol{A = C \cdot B^{-1}}$$

(6)

A expressão (6) é também um dos métodos para verificar o produto da multiplicação de duas matrizes quadradas. Agora vamos verificar o produto da multiplicação das matrizes do exercício acima com ajuda deste método:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa da matriz B:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 10/3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 1 & 2/3 \\ -1/10 & 3/10 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 1 & 2/3 \\ -1/10 & 3/10 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2/5 & -2/10 & 1 & 2/3 \\ -1/10 & 3/10 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Verificando se a multiplicação destas duas matrizes está correta, teremos:

$$\boldsymbol{A = C \cdot B^{-1}}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/5 & -2/10 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: A multiplicação foi feita corretamente.

O segundo método, sem dúvidas considera-se o mais trabalhoso. Para verificação rápida, o primeiro método é o preferível.

Em casos que uma das matrizes possuir determinante zero, para que possamos verificar o produto com ajuda da matriz inversa temos que usar a matriz que não possui determinante zero, visto que uma *matriz inversa* só existe se o determinante da matriz for diferente de zero ($\Delta \neq 0$). Se os determinantes das duas matrizes forem iguais á zero, então o método da matriz inversa de verificação não será possível.

Ex.4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Produto:

$$\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}$$

Verificamos que:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Então vamos buscar a inversa da matriz A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos verificar o produto da multiplicação das matrizes A e B, com ajuda da seguinte fórmula:

$$A^{-1}A \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{B = A^{-1} \cdot C}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: o produto é verdadeiro.

Ex.5:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Produto:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Verificamos que:

$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Então vamos buscar a inversa da matriz A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificando o produto, teremos:

$$B = A^{-1} \cdot C$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: o produto é verdadeiro.

Depois de um estudo profundo sobre as matrizes (sucessores dos determinantes) é sempre bom recordar que matriz, pela primeira vez, foi mencionada na China antiga, a chamada então na altura por «quadrado mágico». A principal aplicação da matriz foi a resolução de equações lineares (como o seu antecessor – determinantes). Os quadrados mágicos foram conhecidos um pouco mais tarde pelos matemáticos árabes, provavelmente naquele momento surgiu o princípio de adição de matrizes. Depois do desenvolvimento da teoria dos determinantes no final do século XVII, o matemático **Gabriel Cramer** começou a desenvolver a sua teoria e publicou a famosa «regra de Cramer» em 1751. Em torno deste mesmo período de tempo, surgiu o famoso «método de Gauss». A teoria das matrizes começou a sua existência no meio do século XIX nas obras de **William Hamilton** e **Arthur Cayley**. Os resultados fundamentais na teoria das matrizes pertencem aos matemáticos **Weierstrass, Jordan, Frobenius**. O termo «matriz» foi introduzido por **James Sylvester** em 1850.

Em diante, como a prática faz-nos mais aperfeiçoados e preparados, os estudantes têm a oportunidade de executarem uma série de exercícios de aplicação (2). Estes exercícios por sua natureza não apresentam um nível de complexidade extrema. Boa sorte!

Exercícios de aplicação[3]

=2=

1) Determine a matriz inversa com ajuda dos menores:

a)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$

b)

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) Determina a matriz inversa:

a) Com ajuda da matriz unitária;

a.1) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right);$

a.2) $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right);$

a.3) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right);$

a.4) $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$

---

[3] Soluções na página 173 e com orientações metodológicas.

b) Com ajuda da fórmula do valor próprio de um vector.

b.1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

b.2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

b.3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3) Realiza as seguintes operações:

a) $A + 3B - 2C$, se:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $AB + CB$, se:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) $AB - E$ e $BA - E$, se:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

d) $-5A + BC - E$, se:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

e) $ABC + 2E$, se:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

f) $(A)^T - BC$, se:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -4 & 2 \\ 1 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

g) $AE - EA + AB$, se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

h) $(A + 3B) - 3(E + AB)$, se:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) $AB + CB - AC$, se:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$