

Д.т.н., проф. Е.Г. Жилияков, к.т.н. С.П. Белов,  
к.т.н. Е.И. Прохоренко

### НОВЫЙ МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЧЕВЫХ ДАННЫХ НА ЭВМ

*В статье рассматривается новый метод оптимальной линейной фильтрации, созданный на основе разработанных математических основ вычисления в области оригиналов аддитивных составляющих, трансформанты Фурье которых в заданном частотном интервале в среднеквадратическом смысле наиболее близки к трансформантам исходных последовательностей и имеют в нём большую, чем последние, долю евклидовой нормы (концентрацию энергии).*

#### Введение

Разделение отрезков сигналов на аддитивные составляющие, основные доли энергий которых сосредоточены в различных областях оси частот (частотная фильтрация) в связи с различными целями применяется очень часто.

Используемый в настоящее время подход к частотной фильтрации на основе применения КИХ-фильтров не позволяет осуществить выделение составляющей, которая определяется только энергией смеси, сосредоточенной в заданной частотной полосе. Кроме того, при построении КИХ - фильтров используются критерии, гарантирующие оптимальность только с точки зрения минимума погрешности приближения к прямоугольному виду трансформанты Фурье, их импульсной характеристики. При этом не рассматривается оптимальность выходных последовательностей КИХ-фильтров с позиций погрешности приближения в заданном частотном интервале трансформанты Фурье исходного отрезка данных.

Однако, трансформанта Фурье выделяемой аддитивной компоненты должна быть оптимальной в смысле наилучшего среднеквадратического приближения трансформанты Фурье смеси

в заданном частотном интервале и нулевого значения вне его (частотного интервала).

Исходя из этого, в статье рассматривается новый метод оптимальной линейной частотной фильтрации, применение которого позволяет выделить из обрабатываемой последовательности данных аддитивную составляющую, оптимальную в указанном выше смысле, и зависящую только от доли энергии исходной смеси, сосредоточенной в заданном частотном интервале.

#### Математические основы метода оптимальной линейной фильтрации

Пусть имеется вектор речевых данных с числом отсчетов  $N$  (длительностью  $N$ )

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)' \quad (1)$$

где штрих означает транспонирование, полученное в результате регистрации речевых сигналов длительностью  $T$  в дискретных точках интервала наблюдений, причём дискретизация предполагается эквидистантной. Трансформанта Фурье такого вектора по определению имеет вид

$$F(\omega) = \sum_{k=1}^N f_k \exp(-j(k-1)\omega), \quad (2)$$

и справедливо представление для компонент исходного вектора

$$f_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) \exp(-j(k-1)\omega) d\omega / 2\pi. \quad (3)$$

Имеется в виду, что периодичность в правой части (2) позволяет соответствующую трансформанту Фурье рассматривать на основном интервале изменений нормированной круговой частоты

$$-\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (4)$$

Математической основой метода служит формула Парсеваля [1]:

$$\sum_{k=1}^N f_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi, \quad (5)$$

Эту формулу нетрудно преобразовать

$$\sum_{k=1}^N f_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\omega \in V_k} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi,$$

где интервалы  $V_r$  определяют разбиение оси частот вида

$$V_r = [-v_{r+1}, -v_r) \cup [v_r, v_{r+1}), v_0 = 0, \quad (6)$$

$$0 < v_{r+1} \leq \pi. \quad (7)$$

Таким образом, оказывается возможным осуществить частотный анализ энергетических характеристик исследуемой функции, т.к. интегралы

$$P_r = \int_{\omega \in V_r} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi \quad (8)$$

определяют доли энергии, попадающие в выбранные частотные интервалы. В частности, можно выделить частотные интервалы, в которых сосредоточена подавляющая доля энергии, либо почти периодические компоненты исходной функции, энергии которых сосредоточены в разных интервалах, если последние достаточно узкие по сравнению со значением

$$V_r = 2\pi / T \quad (9)$$

Легко показать, что подстановка в определение (8) правой части соотношения (2) позволяет получить представление для сосредоточенной в частотном интервале (6) части энергии исследуемого вектора

$$P_r = \vec{f}' A_r \vec{f}, \quad (10)$$

где

$$A_r = \{a_{ik}^r\}; a_{ik}^r = (\sin(v_{r+1}(i-r)) - \sin(v_r(i-k))) / (\pi(i-k)); i, k = 1, \dots, N \quad (11)$$

Пусть

$$W_r(\vec{f}, N) = P_r / \|\vec{f}\|^2, \quad (12)$$

где в знаменателе стоит квадрат евклидовой нормы вектора

$$\|\vec{f}\|^2 = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi. \quad (13)$$

Иными словами, правая часть (12) определяет концентрацию евклидовой нормы (энергии) вектора в заданном частотном интервале.

Основываясь на вышеизложенном, задача фильтрации вектора речевых данных вида (1) рассматривается в предположении,

что исходный вектор представляется в виде суммы векторов

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)' = \vec{f}_1 + \vec{f}_2, \quad (14)$$

где первый из векторов в правой части удовлетворяет вариационному принципу

$$S^2(\vec{f}, \vec{f}_1) = \int_{\omega \in V_r} |F(\omega) - F_1(\omega)|^2 d\omega + \int_{\omega \in V_r} |F_1(\omega)|^2 d\omega = \min \quad (15)$$

Здесь введено обозначение для трансформанты Фурье искомого вектора

$$F_1(\omega) = \sum_{k=1}^N f_{k1} \exp(-j(k-1)\omega). \quad (16)$$

Нетрудно показать справедливость представления

$$S^2(\vec{f}, \vec{f}_1) = \vec{f}' A_r \vec{f} - 2\vec{f}_1' A_r \vec{f} + \|\vec{f}_1\|^2, \quad (17)$$

используя которое легко получить решение вариационной задачи (15)

$$\vec{f}_1' = A_r \vec{f}. \quad (18)$$

Этот вектор естественно называть оптимальным в смысле минимальности критерия (17), а фильтрацию на основе вычисления правой части (18) - линейной оптимальной фильтрацией.

Сопоставляя соотношения (10) и (18), нетрудно показать справедливость равенства

$$P = (\vec{f}_1, \vec{f}), \quad (19)$$

которое показывает, что приходящаяся на выбранный частотный интервал энергия исходного вектора численно равна скалярному его произведению на результат фильтрации.

Непосредственно из (18) нетрудно получить соотношение для вычисления энергии вычисляемого в результате фильтрации вектора

$$\|\vec{f}_1\|^2 = \vec{f}' A_r A_r \vec{f}. \quad (20)$$

Подставив в правую часть соотношения (18) определение элементов субполосной матрицы вида (11), после несложных преобразований можно получить представление компонент вектора оптимальной фильтрации через трансформанту Фурье исходного вектора

$$f_{i1} = \int_{\omega \in V_r} F(\omega) \exp(-j(i-1)\omega) d\omega / 2\pi. \quad (21)$$

Иными словами, оптимальную фильтрацию, определяемую соотношением (18), можно интерпретировать как вычисление обратного преобразования от трансформанты Фурье исходного вектора, но только на заданном частотном интервале.

Отметим, что соотношение (18) делает операцию интегрирования трансформанты Фурье исходной функции по любому частотному интервалу осуществимой без явного перехода в частотную область, хотя реально вычислить трансформанту Фурье во всех точках интервала невозможно.

Для приложений важным выводом из соотношения (21) является то, что получаемый в результате фильтрации вектор является не только оптимальным в смысле условия (15), но и определяется только отрезком трансформанты Фурье исходного вектора, соответствующим выбранному частотному интервалу.

Это обстоятельство можно считать существенным преимуществом предлагаемого подхода перед частотной фильтрацией на основе реализации свёртки исходной функции и импульсной характеристики фильтра, т.к., вообще говоря, невозможно создать идеально прямоугольную частотную характеристику фильтра с бесконечно большим подавлением в полосе непропускания и, следовательно, невозможно исключить «просачивание» в выбранный частотный интервал энергии из соседних частотных областей. В зависимости от соотношений энергий в заданном частотном интервале и смежных частотных областях просочившаяся энергия может стать сравнимой по величине с имеющейся. Иными словами, результат фильтрации на основе реализации свёртки может существенным образом определяться трансформантой Фурье исходного вектора из соседних, с выбранным, частотных интервалов, что нельзя признать допустимым.

Имея в виду определение (16), нетрудно, суммируя соответствующим образом левую и правую части равенства (21), получить соотношение для трансформанты Фурье результата оптимальной фильтрации на основе соотношения (18)

$$F_1(v) = \int_{\omega \in V} F(\omega) \exp(-j(v - \omega)N/2) \sin((v - \omega)N/2) / \sin((v - \omega)/2) d\omega / 2\pi \quad (22)$$

Непосредственно из представления (21) нетрудно получить аналогичное (если не принимать во внимание пределы интегриро-

вания) соотношения для трансформанты Фурье исходного вектора

$$F(v) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) \exp(-j(v - \omega)T/2) \sin((v - \omega)T/2) / \sin((v - \omega)/2) d\omega / 2\pi \quad (23)$$

Таким образом, трансформанта Фурье исходного вектора является собственной функцией ядра в соотношениях (22) и (23), но в последнем случае интегрирование осуществляется по конечному частотному интервалу. Близость трансформант Фурье исходного вектора и результата оптимальной фильтрации будет обеспечиваться при таких значениях  $N$ , когда ядро в (22) (ядро Дирихле) будет хорошо аппроксимировать дельта - функцию Дирака.

Представляет несомненный интерес определение оптимальных значений слагаемых в правой части функционала (15), а именно, относительной квадратичной погрешности аппроксимации исходной трансформанты Фурье в заданном частотном интервале

$$\rho_1^2(\vec{f}, \vec{f}_1) = \int_{\omega \in V} |F(\omega) - F_1(\omega)|^2 d\omega / \vec{f}' A_r \vec{f} = (\vec{f} - \vec{f}_1)' A_r (\vec{f} - \vec{f}_1) / \vec{f}' A_r \vec{f}; \quad (24)$$

и долю «просачивающейся» энергии результата фильтрации за пределы выбранного частотного интервала

$$\rho_2^2(\vec{f}, \vec{f}_1) = \int_{\omega \in V} |F_1(\omega)|^2 d\omega / \|\vec{f}_1\|^2 = \vec{f}_1' (I - A_r) \vec{f}_1 / \|\vec{f}_1\|^2. \quad (25)$$

Здесь и в дальнейшем  $I$  - единичная матрица, размерность которой определяется из контекста изложения.

Легко выявить удобство выражений для энергетических субполосных характеристик векторов на основе разработанного математического аппарата.

Функционал (критерий) погрешностей фильтрации легко обобщить на тот случай, когда по каким-то причинам целесообразно придать разную степень важности его составляющим в (15). Для сохранения свойства линейности метода фильтрации предлагается использовать следующий вариационный принцип

$$S_b^2(\vec{f}, \vec{f}_1) = (1 - b) \int_{\omega \in V} |F(\omega) - F_1(\omega)|^2 d\omega + b \int_{\omega \in V} |F_1(\omega)|^2 d\omega = \min, \quad (26)$$

где параметр  $b$  удовлетворяет неравенству

$$0 < b < 1. \quad (27)$$

Легко понять, что рассмотренному выше функционалу (15) соответствует равенство (одинаковая важность)

$$b = 0,5. \quad (28)$$

Соответствующим обобщением (17) в этом случае будет

$$S_b^2(\vec{f}, \vec{f}_1) = (1-b)\vec{f}' A_r \vec{f} - 2(1-b)\vec{f}_1' A_r \vec{f} + \vec{f}_1' (I + (1-2b)A_r) \vec{f}_1. \quad (29)$$

Отметим, что матрица

$$C_b = (I + (1-2b)A_r), \quad (30)$$

будет не особенной, поэтому справедливо представление для вектора, удовлетворяющего требованию (29) (оптимальному в этом смысле)

$$\vec{f}_{1b} = C_b^{-1} A_r \vec{f} = C_b^{-1} \vec{f}_1. \quad (31)$$

Таким образом, отличия в получаемых согласно (31) и (18) векторах определяются матрицей (30), которая при выполнении равенства (28), очевидно равна единичной матрице  $I$ .

### Вычислительные эксперименты

Для подтверждения эффективности работы предлагаемого метода частотного разделения сигналов в сравнении с применением КИХ – фильтрации были проведены вычислительные эксперименты, сущность которых заключалась в разбиении всего частотного диапазона (0-4кГц) звука речи (представленного на рис. 1) на 10 интервалов с последующим выделением в каждом из выбранных частотных интервалов спектра оптимального вектора длительностью  $N=512$  отсчетов при частоте дискретизации 7350 Гц. Результаты вычислений модулей трансформант Фурье выходных сигналов фильтров представлены на рис. 2-5, на которых спектр выходного сигнала оптимального фильтра, в каждом из выбранных интервалов и вне его, выделен сплошной линией с точками, выходных сигналов КИХ-фильтров, с длиной импульсной характеристики 1024 показаны пунктирной линией с точками, а спектр исходного сигнала (звук «а») – пунктирной линией. Границы выбранных частотных интервалов отмечены вертикальными линиями из точек.

Результаты вычислительных экспериментов иллюстрируют теоретический вывод о том, что в случае оптимальной фильтрации результирующий сигнал определяется только трансформан-

той Фурье исходного сигнала, соответствующего заданному частотному интервалу ( см. соотношение (21)).

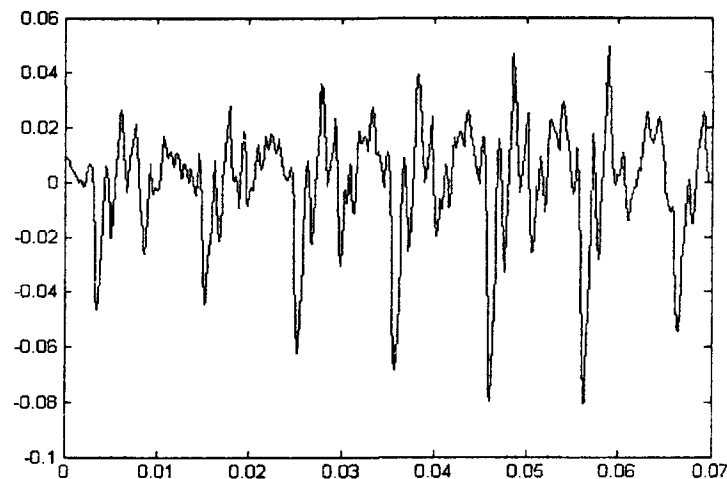


Рис. 1

Отрезок речевого сигнала (звук «а»)

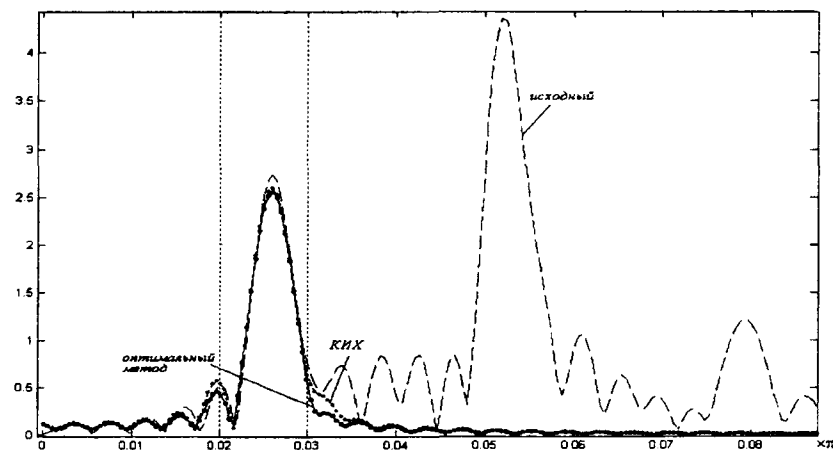


Рис. 2

Спектры: отрезка исходного сигнала (пунктирная линия), результатов его КИХ - фильтрации (пунктирная линия с точками) и оптимальной фильтрации (сплошная линия с точками) в частотном интервале  $\nu_1 = 0,02\pi$ ;  $\nu_2 = 0,03\pi$

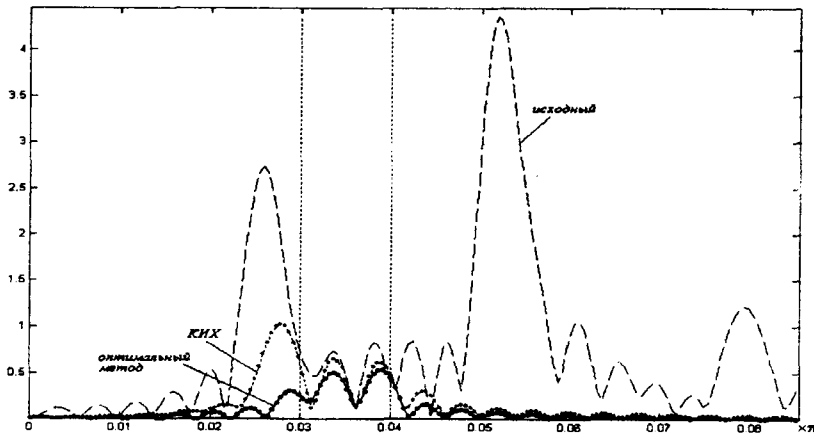


Рис. 3

Спектры: отрезка исходного сигнала (пунктирная линия), результатов его КИХ - фильтрации (пунктирная линия с точками) и оптимальной фильтрации (сплошная линия с точками) в частотном интервале  $\omega_1 = 0,03\pi$ ;  $\omega_2 = 0,04\pi$

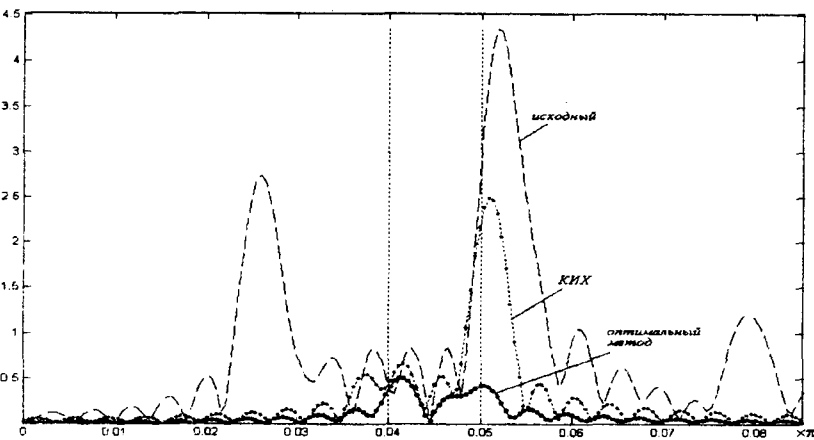


Рис. 4

Спектры: отрезка исходного сигнала (пунктирная линия), результатов его КИХ - фильтрации (пунктирная линия с точками) и оптимальной фильтрации (сплошная линия с точками) в частотном интервале  $\omega_1 = 0,04\pi$ ;  $\omega_2 = 0,05\pi$

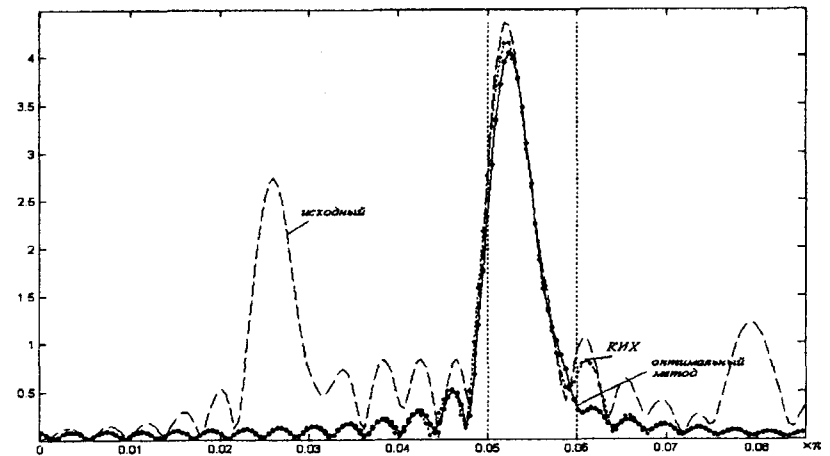


Рис. 5

Спектры: отрезка исходного сигнала (пунктирная линия), результатов его КИХ - фильтрации (пунктирная линия с точками) и оптимальной фильтрации (сплошная линия с точками) в частотном интервале  $\omega_1 = 0,05\pi$ ;  $\omega_2 = 0,06\pi$ .

В отличие от этого сигнал на выходе КИХ-фильтра содержит энергию и из соседних интервалов, что отчетливо демонстрируют рис. 3 (слева от границы интервала), 4 и 5 (справа от границы интервала).

Особенно важны указанные преимущества с точки зрения «просачивания» энергии за пределы частотного интервала (см. левые и правые границы), что влияет на уровень помех, типа «интерференция канальных сигналов».

В заключении представляется целесообразным отметить, что использование вариационного принципа (15) или его дискретного аналога (29) позволило создать методы оптимальной фильтрации, обладающие рядом преимуществ перед используемыми в настоящее время подходами.

Одной из самых важных особенностей является гарантия того, что результат фильтрации (функция или вектор) определяется только теми отрезками трансформант Фурье исходных данных, которые расположены в выбранных частотных интервалах (см. соотношения (21)).

Другой пример - исследование возможности аппроксимации исходного отрезка функции или вектора с помощью результатов фильтрации на основе соотношений вида (24) и (25), позволяющих вычислить погрешности таких приближений.

Легко понять, что имеется возможность осуществления аналитических исследований и иных аспектов разработанной оптимальной фильтрации.

Очевидно, что и для задачи фильтрации субполосные ядра и матрицы также играют роль фундаментальной основы, позволяющей не только построить соответствующие вычислительные алгоритмы, но и осуществить аналитические исследования свойств получаемых результатов.

### Литература

1. Хургин Я.И. и Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. М., Наука, 1971. 408 с. с илл.
2. Жилияков Е.Г., Белов С.П. и Прохоренко Е.И. Вариационные методы частотного анализа звуковых сигналов. – "Труды учебных заведений связи", 2006, № 174, с. 163-170.
3. Жилияков Е.Г., Белов С.П. и Мисливец И.Ю. Оптимальное формирование дискретных канальных сигналов. – "Вопросы радиоэлектроники, сер. РЛТ, 2007, вып. 4, с. 91-104.
4. Большев Л.Н. и Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М., Наука, 1983. 416 с.
5. Гонтмахер Ф.Р. Теория матриц. М., Физматлит, 2004. 560 с.

*Статья поступила 15.10.2007*