УДК 517.9

Л. А. Ковалева, А. П. Солдатов

Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах

Рассматривается задача Дирихле для гармонических функций на двумерных стратифицированных множествах, которые для простоты предполагаются комплексами. Показано, что при определенных условиях эта задача фредгольмова в классе Гёльдера, а также в весовых классах Гёльдера функций, удовлетворяющих условию Гёльдера вне любой окрестности вершин комплекса и допускающих особенности степенного характера. Изучена также степенно-логарифмическая асимптотика решения рассматриваемой задачи в этих вершинах.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: задача Дирихле, двумерный комплекс, гармонические функции, фредгольмовость, индекс, концевой символ, весовой класс Гёльдера, степенно-логарифмическая асимптотика.

DOI: 10.4213/im8223

§ 1. Постановка задачи

Уравнения на стратифицированных множествах моделируют целый ряд физических процессов, таких как, например, диффузия в сильно неоднородных средах или средах со сложным геометрическим устройством, малые перемещения точек механических систем, составленных из упругих континуумов (мембран, струн и т. п.) разных размерностей.

Теории уравнений на стратифицированных множествах посвящены многочисленные исследования (см. [1]–[4]). Однако состояние этой теории к настоящему моменту далеко от своего завершения. Например, вопрос о классической разрешимости задачи Дирихле для множеств, содержащих страты произвольных размерностей, не решен. Имеется только достаточно общий результат, принадлежащий А. А. Гаврилову и О. М. Пенкину [5] о слабой разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений на стратифицированных множествах. В настоящей работе вопросы классической разрешимости исследуются для двумерных стратифицированных множеств, которые для простоты предполагаются комплексами. В этом случае задача сводится к так называемой нелокальной задаче Римана теории функций [7]. В одном частном случае она рассмотрена в [8].

Условимся компакт $M \subseteq \mathbb{R}^3$ называть *многоугольником*, если он лежит в некоторой плоскости и является в ней выпуклым многоугольником. *Двумерным комплексом* K назовем объединение конечного числа многоугольников,

Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113PK01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

которые попарно могут пересекаться лишь по своим вершинам либо сторонам. В этом объединении многоугольники M называем *гранями комплекса*, а отрезки L, являющиеся стороной одной или нескольких граней, – *ребрами*. Вершины τ этих многоугольников составляют вершины комплекса. Удобно множества граней, ребер и вершин обозначать соответственно $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ и F, а число их элементов – m, l и n. Таким образом,

$$K = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M, \qquad K^1 = \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L, \tag{1.1}$$

где в правой части равенств M и L рассматриваются как подмножества в $\mathbb{R}^3$. Заметим, что множество K^1 здесь представляет собой ломаную в $\mathbb{R}^3$, звенья которой могут попарно пересекаться лишь по своим концам, это множество можно назвать *остовом* комплекса K.

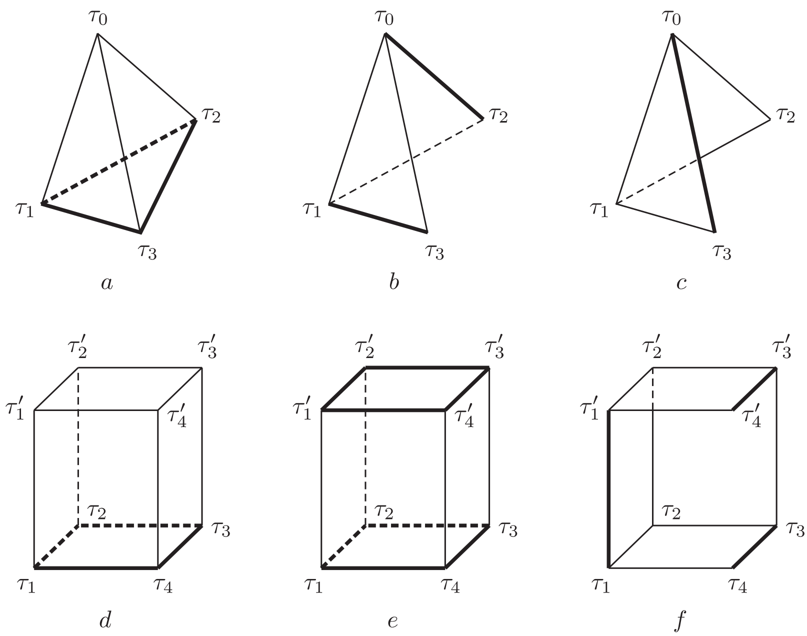
Пусть $\mathcal{M}_\tau$ и $\mathcal{L}_\tau$ – множества всех соответственно граней и ребер, имеющих τ своей вершиной. Аналогичный смысл имеет множество $\mathcal{M}_L$ граней, имеющих своей стороной ребро L, и множество $\mathcal{L}_M$, составленное из сторон грани M. Число элементов этих множеств обозначим соответственно m_τ, l_τ и m_L, l_M, число m_L называем также *кратностью* ребра L. Ребра кратности 1 относим к сторонам комплекса K. Заметим, что

$$2m_\tau = \sum_{L\in\mathcal{L}_\tau} m_L, \qquad \sum_{\tau\in F} m_\tau = \sum_{M\in\mathcal{M}} l_M. \tag{1.2}$$

Удобно положить также $F_M = F\cap M$ и $F_L = F\cap L$; очевидно, число элементов F_M совпадает с l_M, а F_L состоит из двух точек – концов отрезка L.

Зафиксируем некоторое подмножество сторон, которое обозначим $\mathcal{L}(D)$, в дальнейшем они будут служить носителями данных задачи Дирихле. В противоположность этому во внутренних точках ребер $L\in\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}(D)$ будет введено понятие гармоничности, поэтому множество $\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}(D)$ обозначаем $\mathcal{L}(H)$. Пусть $l(D)$ и $l(H)$ – количества элементов множеств соответственно $\mathcal{L}(D)$ и $\mathcal{L}(H)$, аналогичный смысл имеют обозначения $l_\tau(D)$ и $l_\tau(H)$. Обозначим далее через $F(D)$ множество всех вершин, которые являются концом по крайней мере одной стороны $L\in\mathcal{L}(D)$, и положим $F(H) = F\setminus F(D)$, число элементов этих подмножеств естественно обозначить через $n(D)$ и $n(H)$. Наконец, введем множество $\mathcal{M}(D)$ всех граней, по крайней мере одна сторона которых принадлежит $\mathcal{L}(D)$, и положим $\mathcal{M}(H) = \mathcal{M}\setminus\mathcal{M}(D)$. Число элементов этих множеств обозначим соответственно через $m(D)$ и $m(H)$.

В качестве иллюстрации рассмотрим несколько комплексов $K = K_j$, $1\leqslant j\leqslant 6$, изображенных на рис. 1, a–f. Каждый из них получается из тетраэдра или куба удалением одной или двух граней. Стороны $L\in\mathcal{L}(D)$ выделены жирным шрифтом. Например, в вершине $\tau=\tau_0$ комплекса K_1 (см. рис. 1, a) имеем $l_\tau = m_\tau = 3$, причем эта вершина принадлежит $F(H)$. Остальные три вершины составляют $F(D)$. В этом комплексе три ребра с концом τ_0 принадлежат $\mathcal{L}(H)$ и имеют кратность 2, остальные три ребра являются сторонами комплекса и принадлежат $\mathcal{L}(D)$. Наконец, все три его грани составляют $\mathcal{M}(D)$. В комплексе K_3 (см. рис. 1, c), составленном из двух граней, имеется одно ребро



кратности 2, остальные четыре ребра являются сторонами, причем одна из них принадлежит $\mathcal{L}(D)$. Множество $F(H)$ здесь составлено из двух вершин τ_1, τ_2.

Аналогично (1.1) соответствующие объединения элементов множеств $\mathcal{L}(D)$ как отрезков обозначим $K^1(D)$ и $K^1(H)$. Заметим, что $F(D) = F \cap K^1(D)$ и $F(H) = \{\tau \in F,\ l_\tau(D) = 0\}$. Обозначим через $\dot{K}(D)$ совокупность внутренностей граней $M \in \mathcal{M}$ и ребер $L \in \mathcal{L}(H)$, т.е. $\dot{K} = K \setminus (F \cup K^1(D))$. По определению непрерывная на $\dot{K}(D)$ функция u гармонична, если гармоничны все ее сужения на грани и для каждого ребра $L \in \mathcal{L}(H)$ выполняется соотношение

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_L} \frac{\partial u_M}{\partial \nu_M}\bigg|_L = 0, \qquad u_M = u|_M, \tag{1.3}$$

где ν_M – внутренняя единичная нормаль на L по отношению к области M.

Задача Дирихле (задача D) заключается в отыскании гармонической на $\dot{K}(D)$ функции $u \in C(K \setminus F)$ по краевому условию

$$u|_{K^1(D)} = f, \tag{1.4}$$

где функция $f \in C[K^1(D) \setminus F(D)]$ задана.

В условии (1.3) предполагается, что функция u_M непрерывно дифференцируема вплоть до внутренних точек граничного отрезка L. Это требование можно несколько ослабить, вводя сопряженную гармоническую функцию v_M по отношению к некоторой декартовой системе координат на грани M. В силу условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u_M}{\partial \nu_M} = \pm v_M',$$

где штрих обозначает дифференцирование вдоль L. Если эти системы координат выбрать так, чтобы реализовывался верхний знак, то (1.3) перейдет в соотношение

$$\sum_{M\in\mathcal{M}_L} v_M|_L = \mathrm{const}, \qquad L\in\mathcal{L}(H). \tag{1.5}$$

Отмеченное ослабление заключается в замене (1.3) этим соотношением с единственным требованием, чтобы функция v_M была непрерывна вплоть до внутренних точек отрезка L.

Задачу D будем рассматривать в весовом гёльдеровском классе $C^\mu_\lambda(K,F)$, $0<\mu<1$, где весовой порядок $\lambda=(\lambda_\tau,\ \tau\in F)$ представляет собой семейство вещественных чисел, задающих весовую функцию

$$\rho_\lambda(x)=\prod_{\tau\in F}|x-\tau|^{\lambda_\tau}.$$

Это пространство определяется для любого компакта $K\subseteq\mathbb{R}^3$. Напомним, что пространство Гёльдера $C^\mu(K)$ состоит из всех функций φ на K, для которых конечна норма $|\varphi|=|\varphi|_0+[\varphi]_\mu$, где

$$|\varphi|_{0,K}=\sup_{x\in K}|\varphi(x)|, \qquad [\varphi]_{\mu,K}=\sup_{x\neq y}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\mu}.$$

Относительно этой нормы пространство $C^\mu(K)$ банахово. По определению весовое пространство $C^\mu_\lambda(K,F)$ состоит из всех функций φ вида

$$\varphi=\rho_{\lambda-\mu}\psi, \qquad \psi\in C^\mu(K), \quad \psi|_F=0,$$

где весовой порядок $\lambda-\mu$ равен $(\lambda_\tau-\mu,\ \tau\in F)$.

Очевидно, это пространство банахово относительно "перенесенной" нормы $|\varphi|=|\psi|_{C^\mu}$, а его элементы принадлежат C^μ вне любой окрестности множества F и ведут себя как $O(|x-\tau|^{\lambda_\tau})$ при $x\to\tau\in F$. При $\lambda=0$ пространство $C^\mu_0(K,F)$ является банаховой алгеброй по умножению. В этом легко убедиться, если учесть, что равенство

$$|\varphi|=|\varphi|_{0,K}+\{\varphi\}_{\mu,K}, \qquad \{\varphi\}_{\mu,K}=\sup_{x\neq y}\rho_\mu(x)\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\mu}, \tag{1.6}$$

определяет эквивалентную норму в этом пространстве. В частности, операция умножения как билинейное отображение ограничено: $C^\mu_{\lambda'}\times C^\mu_{\lambda''}\to C^\mu_{\lambda'+\lambda''}$.

Если $\lambda>0$, то функция $\varphi\in C^\mu_\lambda$ удовлетворяет условию Гёльдера на K с показателем $\nu=\min(\mu,\lambda_\tau,\tau\in F)$ и обращается в нуль в точках $\tau\in F$. Нетрудно показать [6], что с возрастанием μ и λ семейство пространств C^μ_λ монотонно убывает в смысле вложений:

$$C^{\mu+\varepsilon}_\lambda\subseteq C^\mu_\lambda, \quad C^\mu_{\lambda+\varepsilon}\subseteq C^\mu_\lambda, \qquad \varepsilon>0.$$

В частности, можно ввести классы

$$C^\mu_{\lambda+0}=\bigcup_{\varepsilon>0}C^\mu_{\lambda+\varepsilon}, \qquad C^\mu_{\lambda-0}=\bigcap_{\varepsilon>0}C^\mu_{\lambda-\varepsilon},$$

при $\lambda = 0$ их обозначаем кратко $C^{\mu}_{\pm 0}$. Очевидно, функции $\varphi \in C^{\mu}_{+0}(K, F)$ удовлетворяют условию Гёльдера на всем множестве K с некоторым показателем и обращаются в нуль в точках $\tau \in F$, а класс $C^{\mu}_{-0}(K, F)$ состоит из всех функций, которые после умножения на весовую функцию ρ_ε с любым $\varepsilon > 0$ принадлежат C^{μ}_{+0}. В этом смысле данные функции в точках $\tau \in F$ допускают особенности логарифмического характера.

Введенные пространства ниже используются в основном для комплекса K и для множества $K^1(D)$ – носителя краевого условия. (1.4). Удобно еще ввести соответствующие обозначения для кусочно непрерывных функций φ на K по отношению к их сужениям $\varphi_M = \varphi|_M$. Именно, через $C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{K}, F)$ обозначаем пространство функций φ, для которых $\varphi_M \in C^{\mu}_{\lambda}(M, F_M)$ при всех $M \in \mathcal{M}$. Как показывает следующая лемма, для функций $\varphi \in C(K \setminus F)$ это определение не дает ничего нового.

Лемма 1.1. *Пространства $C(K \setminus F) \cap C^{\mu}_{\lambda}(\widehat{K}, F)$ и $C^{\mu}_{\lambda}(K, F)$ совпадают, причем соответствующие нормы эквивалентны.*

Доказательство достаточно провести по отношению к одной точке $\tau \in F$. Именно, выберем $\rho > 0$ столь малым, что все остальные вершины лежат вне шара $B_\tau = \{|x - \tau| \leqslant \rho\}$. Тогда достаточно показать, что если непрерывная на $(K \cap B_\tau) \setminus \tau$ функция φ принадлежит $C^{\mu}_{\lambda}(M \cap B_\tau, \tau)$ для любого $M \in \mathcal{M}_\tau$, то $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda}(K \cap B_\tau, \tau)$.

Без ограничения общности можно считать, что $\tau = 0$ и $\rho = 2^{-s}$ для некоторого натурального s. Тогда по отношению к шаровому слою $D = \{\rho/2 \leqslant |x| \leqslant \rho\}$ функция φ на $K \cap B_0$ однозначно определяется последовательностью функций $\varphi_i(x) = \varphi(2^{-i}x)$, $i = 0, 1, \dots$, на $K \cap D$. Как было отмечено выше, пространство $C^{\mu}_{0}(K \cap B_0, 0)$ можно определить с помощью нормы (1.6). В свою очередь отсюда легко следует, что это пространство можно также описать с помощью эквивалентной нормы

$$|\varphi| = \sup_{i \geqslant 0} |\varphi_i|_{C^{\mu}(K \cap D)}.$$

Поэтому остается заметить, что для непрерывных на $K \cap D$ функций ψ норма в $C^{\mu}(K \cap D)$ эквивалентна норме

$$|\psi| = \max_{M \in \mathcal{M}_0} |\psi|_{C^{\mu}(M \cap D)}.$$

Весовое пространство $C^{1,\mu}_{\lambda}(K, F)$ дифференцируемых функций φ определяется условиями

$$\varphi \in C^{\mu}_{\lambda}(K, F), \qquad \varphi' \in C^{\mu}_{\lambda-1}(\widehat{K}, F),$$

где φ' – вектор-градиент, определяемый на M соотношением

$$\varphi'|_M = \left(\frac{\partial \varphi_M}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_M}{\partial y}\right)$$

по отношению к некоторой декартовой системе координат в плоскости M.

Аналогичный смысл имеет пространство $C^{1,\mu}_{\lambda}[K^1(D), F(D)]$ на множестве $K^1(D)$, кусочно непрерывная производная f' здесь понимается вдоль отрезков $L \in \mathcal{L}(D)$.

Чтобы рассмотрение задачи в классе C^μ_λ было правомерным, в соответствии с (1.5) необходимо обосновать следующее свойство.

Лемма 1.2. *Пусть гармоническая функция u на $\dot K(D)$ принадлежит классу $C^\mu_\lambda(K,F)$, $\lambda_\tau \neq 0$, в фиксированной точке $\tau \in F$ и $\rho > 0$ выбрано столь малым, что остальные вершины из F лежат вне шара $B_\tau = \{|x-\tau| \leqslant \rho\}$. Тогда для любой грани $M \in \mathcal{M}_\tau$ сопряженная к u_M гармоническая функция v_M с точностью до аддитивной постоянной также принадлежит $C^\mu_{\lambda_\tau}(M \cap B_\tau, \tau)$.*

Доказательство достаточно провести для функции $u(z)$, заданной в секторе $S = \{0 \leqslant \arg z \leqslant \theta,\ |z| \leqslant 1\}$ комплексной плоскости. Пусть эта функция гармонична внутри S и принадлежит классу $C^\mu_\lambda(S,0)$, $\lambda \neq 0$. Разбивая S на секторы меньшего раствора и не ограничивая общности, можно предполагать, что $\theta|\lambda| < \pi$. Рассмотрим конформное отображение $\zeta = z^{\pi/\theta}$, переводящее S на полукруг $\widetilde S = \{|\zeta| \leqslant 1,\ \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0\}$. Утверждается, что соответствующая функция $\widetilde u(\zeta) = u(z)$ принадлежит классу $C^\mu_{\widetilde\lambda}(\widetilde S, 0)$ с весовым порядком $\widetilde\lambda = \lambda\theta/\pi$.

В самом деле, по условию имеем $u_0(z) = |z|^{-\lambda}u(z) \in C^\mu_0(S,0)$ и, очевидно, $|\zeta|^{-\widetilde\lambda}\widetilde u(\zeta) = u_0(z)$, поэтому утверждение достаточно установить для $\lambda = 0$. Как и при доказательстве леммы 1.1, воспользуемся тем, что для непрерывных на $S \setminus 0$ функций пространство $C^\mu_0(S,0)$ можно определить с помощью эквивалентной нормы

$$|\varphi| = \sup_{i \geqslant 0} |\varphi_i|_{C^\mu(S\cap D)}, \tag{1.7}$$

где $D = \{1/2 \leqslant |z| \leqslant 1\}$ и $\varphi_i(z) = \varphi(2^{-i}z)$, $i = 0, 1, \dots$. С помощью этой нормы утверждение об ограниченности оператора $\varphi \to \widetilde\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta^{\theta/\pi})$ из $C^\mu_0(S,0)$ в $C^\mu_0(\widetilde S,0)$ доказывается непосредственно.

Итак, без ограничения общности можно считать, что S является полукругом и $0 < |\lambda| < 1$. Необходимо показать, что если гармоническая функция принадлежит классу $C^\mu_0(S,0)$, то с точностью до аддитивной постоянной аналитическая функция $\phi = u + iv$ принадлежит этому же классу. Хорошо известно, что функция ϕ непрерывна в $S \setminus 0$ и в точке $z = 0$ имеет слабую особенность.

Вычитая из u подходящую линейную функцию $ax + by + c$, без ограничения общности можно предполагать, что $u(\pm 1) = 0$. Полагая $f = u|_{[-1,1]}$, рассмотрим аналитическую функцию

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \qquad z \in S,$$

которая принадлежит классу C^μ вне любой окрестности $z = 0$ и на основании полукруга вещественная часть которой совпадает с f.

Если $f_0(t) = |t|^{-\lambda}f(t)$, то для функции

$$\psi_0(z) = \begin{cases} |z|^{-\lambda}\psi(z), & -1 < \lambda < 0, \\ |z|^{-\lambda}[\psi(z) - \psi(0)], & 0 < \lambda < 1, \end{cases}$$

имеем выражение

$$\psi_0(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} \left(\frac{|z|}{|t|}\right)^{\lambda_0} \frac{f(t)dt}{t-z}, \qquad \lambda_0 = \begin{cases} -\lambda, & -1 < \lambda < 1, \\ 1-\lambda, & 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

С помощью нормы (1.7) легко вывести, что оператор $f_0 \to \psi_0$, определяемый этой формулой, ограничен из пространства $\{f \in C_0^\mu([-1,1];0),\ \ f(\pm 1) = 0\}$ в $C_0^\mu(S,0)$. Следовательно, с точностью до аддитивной постоянной имеем $\psi \in C_\lambda^\mu(S,0)$. Поскольку функция $\phi - \psi$ имеет слабую особенность в точке $z = 0$ и ее вещественная часть обращается в нуль на основании полукруга, эта функция аналитически продолжается на единичный круг $|z| < 1$. Следовательно, с точностью до аддитивной постоянной классу $C_\lambda^\mu(S,0)$ принадлежит и функция ϕ.

§ 2. Концевой символ задачи

С каждой вершиной $\tau \in F$ свяжем $(2m_\tau \times 2m_\tau)$-матрицу-функцию $W_\tau(\zeta) = U_\tau + V_\tau(\zeta)$ комплексной переменной ζ, аналитическую на всей плоскости. С этой целью множество $\{1,\dots,2m_\tau\}$ разобьем на m_τ пар $P_{\tau,M}$, $M \in \mathcal{M}_\tau$, и введем отображение $i \to L_{\tau,i}$ данного множества на $\mathcal{L}_\tau$, считая для $P_{\tau,M} = \{i,j\}$ ребра $L_{\tau,i}$ и $L_{\tau,j}$ сторонами грани M. В этих обозначениях по определению

$$V_{\tau,ij}(\zeta) = \begin{cases} e^{i\theta_{\tau,M}\zeta}, & \{i,j\} = P_{\tau,M}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\theta_{\tau,M}$ – угол грани M при вершине τ, и

$$U_{\tau,ij} = \begin{cases} 1 - 2/m_L, & i = j,\ L_{\tau,i} = L \in \mathcal{L}(H), \\ 1 & i = j,\ L_{\tau,i} \in \mathcal{L}(D), \\ -2/m_L, & i \neq j,\ L_{\tau,i} = L_{\tau,j} = L, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Очевидно, матрица V_τ блочно-диагональна относительно разбиения P_τ множества номеров $\{1,\dots,2m_\tau\}$ на пары $P_{\tau,M}$, а матрица U_τ обладает аналогичным свойством по отношению к разбиению Q_τ на подмножества $Q_{\tau,L} = \{i,\ L_{\tau,i} = L\}$, $L \in \mathcal{L}_\tau$. Заметим, что число элементов последнего разбиения равно l_τ, что согласуется с первым равенством (1.2).

Из определения (2.1) видно, что

$$V_\tau(\zeta)V_\tau(-\zeta) = 1, \qquad \det V_\tau(\zeta) = (-1)^{m_\tau} e^{2i\theta\zeta}, \tag{2.3}$$

где $\theta = \sum_M \theta_{\tau,M}$, и

$$\det(1 + V_\tau)(\zeta) = \prod_M (1 - e^{2i\theta_{\tau,M}\zeta}). \tag{2.4}$$

Матрица U_τ обладает следующими свойствами.

Лемма 2.1. *При каждом τ имеют место соотношения*

$$U_\tau^2 = 1, \qquad \det U_\tau = (-1)^{l_\tau(H)}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Рассмотрим числовую $(n \times n)$-матрицу $A = A_n$, диагональные элементы которой равны a, а остальные элементы равны b. Легко убедиться также в том, что последовательность $x_n = \det A_n$, $n \geqslant 1$, с первым членом $x_1 = a$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $x_n = (a-b)x_{n-1} + b(a-b)^{n-1}$, $n \geqslant 2$. Поэтому $\det A = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$.

Согласно (2.2) диагональный блок $U_\tau(Q_{\tau,L})$, отвечающий множеству номеров $Q_{\tau,L} = \{i,\ L_{\tau,i} = L\}$, при $n = m_L > 1$ совпадает с матрицей A_n, для которой $a = 1 - 2/n$, $b = -2/n$, так что $\det A_n = -1$. Очевидно, при $n \geqslant 2$ матрица $\widetilde{A} = A^2$ определяется аналогично A по формулам $\widetilde{a} = a^2 + (n-1)b^2$ и $\widetilde{b} = 2ab + (n-2)b^2$. В этом случае $\widetilde{a} = 1$, $\widetilde{b} = 0$, так что $A_n^2 = 1$. Следовательно, и U_τ^2 является единичной матрицей, что доказывает первое равенство (2.5).

Рассмотренный выше диагональный блок $U_\tau(Q_{\tau,L})$ отвечает ребру $L \in \mathcal{L}(H)$. Поскольку $\det U_\tau$ равен произведению определителей всех диагональных блоков и одномерные диагональные блоки, отвечающие $L \in \mathcal{L}(D)$, равны 1, отсюда следует второе соотношение в (2.5), что завершает доказательство леммы.

Рассмотрим функцию

$$h_\tau(\zeta) = \frac{\det W_\tau(\zeta)}{\det W_\tau^0(\zeta)}, \tag{2.6}$$

где, напомним, $W = U + V$ и для краткости положено $W^0 = 1 + V$. Легко видеть, что при фиксированном вещественном λ матрица $[V_\tau(\lambda + it)]^{\pm 1} \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Следовательно, функция $h_\tau(\lambda + it)$ при $t \to \pm\infty$ имеет пределы

$$h_\tau(\lambda + i\infty) = \det U_\tau, \qquad h_\tau(\lambda - i\infty) = 1.$$

Из этих же соображений в каждой полосе $\lambda' < \operatorname{Re}\zeta < \lambda''$ аналитическая функция $\det W_\tau(\zeta)$ имеет конечное число нулей, так что проекция множества этих нулей на действительную ось представляет собой дискретное множество. Поэтому вне этого множества можем ввести кусочно постоянную возрастающую функцию χ_τ по условиям

$$\chi_\tau(-0) = \frac{1}{2\pi i}(\ln h_\tau)(\zeta)\big|_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty}, \qquad \chi_\tau(\lambda'') - \chi_\tau(\lambda') = \sum_{\lambda' < \operatorname{Re}\zeta < \lambda''} s_\tau(\zeta), \tag{2.7}$$

где $\varepsilon > 0$ выбрано столь малым, что $\det W_\tau(\zeta) \neq 0$ при $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\zeta < 0$, и $s_\tau(\zeta_0)$ есть порядок нуля функции $\det W_\tau(\zeta)$ в точке $\zeta = \zeta_0$ (при $\det W_\tau(\zeta_0) \neq 0$ полагается $s_\tau(\zeta_0) = 0$).

В действительности функция χ_τ через нули концевого символа выражается явно.

Лемма 2.2. *Имеет место равенство*

$$\chi_\tau(-0) = \frac{m_\tau - s_\tau}{2}, \tag{2.8}$$

где

$$s_\tau = \sum_{\operatorname{Re}\zeta = 0} s_\tau(\zeta)$$

– число нулей функции $\det W_\tau(\zeta)$ *на прямой* $\operatorname{Re}\zeta = 0$, *взятое с учетом их кратности. При этом разность* $m_\tau - s_\tau$ *имеет одну и ту же четность с* $l_\tau(H)$, *так что сумма* $\sum_\tau \chi_\tau$ *является целочисленной функцией.*

Доказательство. В силу матричных соотношений (2.3), (2.4) можем записать

$$W_\tau(\zeta) = U_\tau W_\tau(-\zeta)V_\tau(\zeta), \qquad W_\tau^0(\zeta) = W_\tau^0(-\zeta)V_\tau(\zeta), \tag{2.9}$$

откуда $h_\tau(\zeta) = (\det U_\tau)h_\tau(-\zeta)$. Следовательно, приращения

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2\pi i}(\ln h_\tau)(\zeta)\Big|_{\pm\varepsilon - i\infty}^{\pm\varepsilon + i\infty}$$

на прямых $\operatorname{Re}\zeta = \pm\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, противоположны по знаку. С другой стороны, в полосе между этими прямыми к мероморфной функции (2.6) можно применить принцип аргумента, согласно которому разность $\alpha_+ - \alpha_- = -2\alpha_-$ равна разности $s_\tau - s_\tau^0$ числа нулей в этой полосе соответственно функций $\det W_\tau$ и $\det W_\tau^0$. Согласно (2.4) имеем $s_\tau^0 = m_\tau$, что в соответствии с определением (2.7) завершает доказательство (2.8).

Для доказательства последнего утверждения леммы с учетом (2.3), (2.5) из первого равенства (2.9) для функции $f(\zeta) = \det W_\tau(\zeta)$ выводим соотношение

$$\det W_\tau(\zeta) = (-1)^{m_\tau + l_\tau(H)} e^{2i\theta\zeta} \det W_\tau(-\zeta).$$

Рассмотрим порядок нуля $k = s_\tau(0)$ функции $\det W_\tau$ в точке $\zeta = 0$. Очевидно, предыдущее соотношение справедливо и для функции $f_0(\zeta) = \zeta^{-k}\det W_\tau(\zeta)$ с заменой $m_\tau + l_\tau(H)$ на $m_\tau + l_\tau(H) + k$. Полагая в этом соотношении $\zeta = 0$, приходим к четности числа $m_\tau + l_\tau(H) + s_\tau(0)$. Поскольку $s_\tau(\zeta) = s_\tau(\overline{\zeta})$, то четно и число $m_\tau - s_\tau - l_\tau(H)$. Следовательно, с учетом (2.8) имеем

$$\sum_{\tau\in F} \chi_\tau(-0) = \frac{1}{2}\sum_{\tau\in F} l_\tau(H) + n\rho,$$

где n – целое число. Остается заметить, что первое слагаемое в правой части этого равенства совпадает с числом $l(H)$ элементов множества $\mathcal{L}(H)$.

Рассмотрим подробнее структуру матрицы W_τ. При достаточно малом $\rho > 0$ пересечение $K_\tau = K \cap B_\tau$ с шаром $B_\tau = \{|x - \tau| \leqslant \rho\}$ составлено из круговых секторов $M \cap B_\tau$, $M \in \mathcal{M}_\tau$. Предположим, что множество $K_\tau \setminus \tau$ не связно и $K_\tau^0 \setminus \tau$ есть одна из его связных компонент. Тогда K_τ можно разбить на два подмножества K_τ^0 и K_τ^1 с единственной общей точкой τ. Пусть m_τ^j – число секторов $M \cap B_\tau$, входящих в K_τ^j. Тогда при подходящей нумерации отрезков $L_{\tau,j}$ каждое из множеств $R^0 = \{1, \dots, 2m_\tau^0\}$ и $R^1 = \{2m_\tau^0 + 1, \dots, 2m_\tau\}$ является объединением целых элементов как разбиения P_τ, так и разбиения Q_τ. Соответственно, матрица W_τ блочно-диагональна относительно разбиения на подмножества R^j, причем диагональные блоки имеют структуру концевого символа, отвечающего m_τ^j.

Таким образом, концевой символ достаточно исследовать в предположении, что множество $K_\tau \setminus \tau$ связно. Эта ситуация соответствует тому, что никакое подмножество $R \subseteq \{1, \dots, 2m_\tau\}$ нельзя представить в виде объединения целых элементов как разбиения P_τ, так и разбиения Q_τ. В этом случае говорим также, что разбиения P_τ и Q_τ неприводимы. Как видно из определения матрицы W_τ, разбиение P_τ можно выбирать произвольно. Поэтому удобно его фиксировать, полагая

$$P_{\tau,1} = \{1, m_\tau + 1\},\ P_{\tau,2} = \{2, m_\tau + 2\},\ \ldots,\ P_{\tau,m_\tau} = \{m_\tau, 2m_\tau\}. \tag{2.10}$$

Если грань $M_{\tau,j}$ отвечает $P_{\tau,j}$ и θ_j – ее угол при вершине τ, то матрицы U_τ и V_τ имеют (2×2)-блочную структуру вида

$$U_\tau = \begin{pmatrix} U_{\tau,1} & U_{\tau,0} \\ U_{\tau,0}^\top & U_{\tau,1} \end{pmatrix}, \qquad V_\tau = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где z представляет собой диагональную матрицу с элементами $z_k = e^{i\theta_k\zeta}$ вдоль диагонали, а $(m_\tau \times m_\tau)$-блоки матрицы U_τ определяются равенствами

$$U_{1,ij} = U_{ij}, \qquad U_{2,ij} = U_{i+m,j+m}, \qquad U_{0,ij} = U_{i,j+m}.$$

Соответственно, сам концевой символ имеет блочную структуру

$$W_\tau = \begin{pmatrix} U_{\tau,1} & W_{\tau,0} \\ W_{\tau,0}^\top & U_{\tau,1} \end{pmatrix}, \qquad W_{\tau,0} = z + U_{\tau,0}. \tag{2.12}$$

В предположении $\det W_0 \neq 0$ вычисление $\det W$ сводится к вычислению определителя матриц m-го порядка. Именно, в силу очевидного матричного равенства

$$\begin{pmatrix} U_1 & W_0 \\ W_0^\top & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (W_0^\top)^{-1} \\ W_0^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -U_1 W_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_1 (W_0^\top)^{-1} & 1 - U_1 (W_0^\top)^{-1} U_2 W_0^{-1} \end{pmatrix}$$

имеем

$$\det W = \det W_0 \det W_*, \qquad W_* = U_2 W_0^{-1} U_1 - W_0^\top. \tag{2.13}$$

Если $\det W_* \neq 0$, то явное выражение для обратной матрицы легко выписать, обращая уравнение $W\xi = \eta$. В самом деле, после исключения переменных в системе

$$U_1\xi_1 + W_0\xi_2 = \eta_1, \qquad W_0^\top \xi_1 + U_2\xi_2 = \eta_2$$

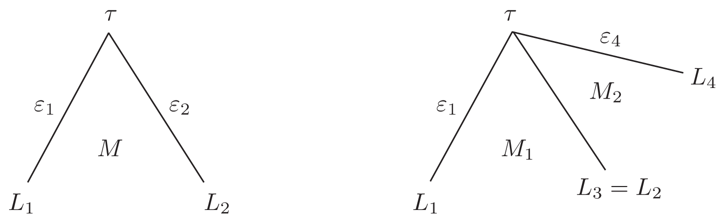
получим

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} W_*^{-1} U_2 W_0^{-1} & -W_*^{-1} \\ W_0^{-1} - W_0^{-1} U_1 W_*^{-1} U_2 W_0^{-1} & W_0^{-1} U_1 W_*^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

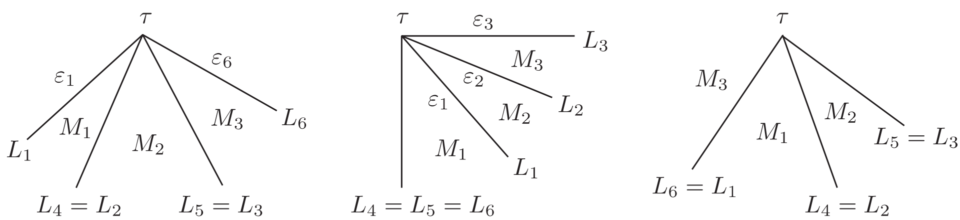
Примеры всех возможных ситуаций для локальной структуры комплекса K в вершине τ для значений $1 \leqslant m_\tau \leqslant 3$ приведены на рис. , , где различные случаи носителя данных Дирихле на сторонах $L_{\tau,j}$ комплекса описаны с помощью сигнатуры

$$\varepsilon_{\tau,j} = \begin{cases} 1, & L_{\tau,j} \in \mathcal{L}(D), \\ -1, & L_{\tau,j} \in \mathcal{L}(H). \end{cases} \tag{2.15}$$

В этих примерах разбиение P_τ выбирается в форме (2.10) и для простоты символ τ в обозначениях опущен, случаи $(m_\tau = 1)$, $(m_\tau = 2, a)$ и $(m_\tau = 3, a - c)$



a *b*



a *b* *c*

отвечают связному множеству $K_\tau \setminus \tau$. Разбиение Q на этих рисунках указывается соответствующими равенствами для L_j.

В обозначениях (2.11), (2.12) и (2.15) концевой символ W в этих примерах и матрица W_*, участвующая в формуле (2.13) для определителя $\det W$, описываются следующим образом:

(i) $m_\tau = 1$ (см. рис. , a)

$$U = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & z \\ z & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \qquad z = e^{i\theta\zeta}; \tag{2.16}$$

(ii) $m_\tau = 2$ (см. рис. , b)

$$\begin{gathered} U_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, 0), \qquad U_2 = \operatorname{diag}(0, \varepsilon_4), \\ U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_0 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ -1 & z_2 \end{pmatrix}, \quad W_* = \begin{pmatrix} z_1 & 1 \\ \varepsilon_1\varepsilon_4(z_1z_2)^{-1} & z_2 \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{2.17}$$

(iii) $m_\tau = 3$ (см. рис. , a)

$$\begin{gathered} U_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, 0, 0), \qquad U_2 = \operatorname{diag}(0, 0, \varepsilon_6), \\ U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad W_0 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ -1 & z_2 & 0 \\ 0 & -1 & z_3 \end{pmatrix}, \\ W_* = \begin{pmatrix} z_1 & 1 & 0 \\ 0 & z_2 & 1 \\ \varepsilon_1\varepsilon_6(z_1z_2z_3)^{-1} & 0 & z_3 \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{2.18}$$

(iv) $m_\tau = 3$ (см. рис. , b)

$$\begin{gathered} U_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \qquad W_0 = \operatorname{diag}(z_1, z_2, z_3), \\ U_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad W_* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-3\alpha_1 & -2 & -2 \\ -2 & 1-3\alpha_2 & -2 \\ -2 & -2 & 1-3\alpha_3 \end{pmatrix}\beta, \end{gathered} \tag{2.19}$$

где положено $\alpha_j = \varepsilon_j z_j^2$ и $\beta = \mathrm{diag}(\varepsilon_1 z_1^{-1}, \varepsilon_2 z_2^{-1}, \varepsilon_3 z_3^{-1})$;

(v) $m_\tau = 3$ (см. рис , c)

$$U_1 = U_2 = 0, \qquad W_* = -W_0^\top,$$
$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad W_0 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & -1 \\ -1 & z_2 & 0 \\ 0 & -1 & z_3 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Для всех значений $m_\tau \leqslant 3$ величины s_τ подсчитываются явно.

Лемма 2.3. *Пусть $m_\tau \leqslant 3$. Тогда функция $\det W_\tau(\zeta)$ не имеет нулей на прямой $\operatorname{Re}\zeta = 0$, отличных от точки $\zeta = 0$, так что s_τ совпадает с порядком нуля $s_\tau(0)$ этой функции в точке $\zeta = 0$. Если множество $K_\tau \setminus \tau$ связно, то в обозначениях (2.15) этот порядок принимает значения*

$$s_\tau(0) = 0 \qquad \text{при} \quad \begin{cases} m_\tau = 1 & \text{(i)} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1), \\ m_\tau = 2 & \text{(ii)} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_4 = -1), \\ m_\tau = 3 & \text{(iii)} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_6 = 1), \\ m_\tau = 3 & \text{(iv)} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 < 3), \end{cases}$$

$$s_\tau(0) = 1 \qquad \text{при} \quad \begin{cases} m_\tau = 1 & \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1), \\ m_\tau = 2 & \text{(ii)} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_4 = 1), \\ m_\tau = 3 & \text{(iii)} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_6 = -1), \\ m_\tau = 3 & \text{(iv)} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1), \end{cases}$$

$$s_\tau(0) = 2 \qquad \text{при} \quad \begin{cases} m_\tau = 3 & \text{(iv)} \quad (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 3), \\ m_\tau = 3 & \text{(v)}. \end{cases}$$

Если множество $K_\tau \setminus \tau$ не является связным, то $s_\tau(0)$ равно сумме порядков нуля определителей диагональных блоков матрицы W_τ, отвечающих связным компонентам этого множества.

Доказательство. Утверждение леммы для случаев $m_\tau = 1$, $m_\tau = 2, a$, $m_\tau = 3, a, c$ вытекает непосредственно из формулы (2.13) и выражений (2.16)–(2.18) и (2.20). Обратимся к оставшемуся случаю $m_\tau = 3, b$. Согласно (2.19) в этом случае

$$\det W(\zeta) = -3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 f(\alpha) \tag{2.21}$$

с функцией

$$f(\alpha) = 3(1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3).$$

Очевидно, эта функция не меняется от перестановки аргументов и обладает свойством

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 f(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}).$$

На прямой $\zeta = it$ переменные $\alpha_j = \varepsilon_j e^{-\theta_j t}$ вещественны и по модулю для всех значений j меньше 1 при $t > 0$ и больше 1 при $t < 0$. Поэтому нули функции $f(\alpha)$ достаточно исследовать при $|\alpha_j| \leqslant 1$. Эту функцию можно записать в виде

$$f(\alpha) = (1-\alpha_1\alpha_2)(1-\alpha_3) + (1-\alpha_1\alpha_3)(1-\alpha_2) + (1-\alpha_2\alpha_3)(1-\alpha_1).$$

Поэтому равенство $f(\alpha) = 0$ в области $|\alpha_j| \leqslant 1$ возможно, только когда все три слагаемых обращаются в нуль, или, что равносильно, когда все $|\alpha_j| = 1$ и либо $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -1$, либо $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3$. Вспоминая определение α_j в (2.21), отсюда заключаем, что $\det W(\zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Re}\zeta = 0$, $\zeta \neq 0$ и $\det W(0) = 0$ тогда и только тогда, когда либо $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$, либо $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 3$.

Остается исследовать кратность этих нулей. Согласно (2.21) имеем

$$(\det W)'(\zeta) = C_1 f_1(\alpha), \qquad f_1(\alpha) = \sum_{j=1}^{3} \theta_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j},$$
$$(\det W)''(\zeta) = C_2 f_2(\alpha), \qquad f_2(\alpha) = \sum_{k,j=1}^{3} \theta_k\theta_j \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j},$$

с некоторыми ненулевыми постоянными C_1, C_2. Прямая проверка показывает, что $f_1(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$ и $f_1(1,1,1) = 0$, $f_2(1,1,1) \neq 0$. Тем самым утверждение леммы для случая $m_\tau = 3, b$ полностью установлено.

Утверждение леммы о порядке полюса сводится к проверке того, что $r_\tau(0) = 1$ при $s_\tau(0) = 2$. Рассмотрим матрицу $W_*^{(-1)} = (\det W_*)W_*^{-1}$, элементы которой составлены из алгебраических дополнений элементов матрицы W_*. Эта матрица аналитична на всей плоскости.

Последнее утверждение вытекает из того, что определитель блочно-диагональной матрицы W равен произведению определителей ее диагональных блоков, так что порядки нулей этих блоков складываются.

Удобно семейство матриц W_τ, $\tau \in F$, записать в виде одной блочно-диагональной матрицы W. С этой целью положим

$$m_F = \sum_{\tau \in F} m_\tau \tag{2.22}$$

и введем в рассмотрение такие блочно-диагональные $(2m_F \times 2m_F)$-матрицы U и V, что семейства их диагональных блоков совпадают с матрицами соответственно U_τ и V_τ, $\tau \in F$. С этой целью $2m_F$ элементов (τ, j), $1 \leqslant j \leqslant 2m_\tau$, $\tau \in F$, занумеруем единым образом от 1 до $2m$ с помощью биекции

$$\alpha\colon \{(\tau, j),\ 1 \leqslant j \leqslant 2m_\tau,\ \tau \in F\} \to \{1, \dots, 2m_F\}. \tag{2.23}$$

Пусть E_τ – образ множества $\{(\tau, j),\ 1 \leqslant j \leqslant 2m_\tau\}$ при этом отображении, так что семейство $L_{\tau,j}$, $1 \leqslant j \leqslant 2m_\tau$, запишется в виде L_k, $k \in E_\tau$. Очевидно, для множества E_τ имеем два разбиения на подмножества $\alpha(P_{\tau,M})$, $M \in \mathcal{M}_\tau$, и $\alpha(Q_{\tau,L})$, $L \in \mathcal{L}_\tau$.

Введем теперь матрицы U и V, которые блочно-диагональны относительно разбиения $E = (E_\tau)$ и E_τ-диагональный блок которых совпадает с матрицами соответственно U_τ и V_τ, записанными в нумерации (2.23). В явном виде формулы (2.1) и (2.2) переходят для этих матриц соответственно в формулы

$$
\begin{aligned}
&U_{kr}=\begin{cases}1-\dfrac{2}{m_L}, & k=r,\\[2mm] -\dfrac{2}{m_L}, & k\neq r,\end{cases} \qquad k,r\in\alpha(Q_{\tau,L}),\quad m_L>1,\\
&U_{kk}=\begin{cases}1, & L\in\mathcal{L}(D),\\ -1, & L\in\mathcal{L}(H),\end{cases} \qquad \{k\}=\alpha(Q_{\tau,L}),\\
&U_{kr}=0 \qquad \text{в остальных случаях}
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

и формулы

$$
\begin{aligned}
&V_{kr}(\zeta)=\begin{cases}0, & k=r,\\ e^{i\theta_{\tau,M}\zeta}, & k\neq r,\end{cases} \qquad k,r\in\alpha(P_{\tau,M}),\\
&V_{kr}=0 \qquad \text{в остальных случаях.}
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Матрицу U можно описать, не прибегая к разбиению $\alpha(Q_\tau)$. С этой целью в соответствии с (1.2) выберем разбиение множества $\{1,\dots,m_F\}$ на подмножества P_M, $M\in\mathcal{M}$, так, чтобы число элементов P_M было равно l_M, и занумеруем множество $\mathcal{L}_M$ сторон, составляющих границу ∂M, в виде L^i, $i\in P_M$. Наряду с разбиением P удобно также ввести разбиение Q множества $\{1,\dots,m_F\}$ на подмножества $Q_L=\{i,\ L^i=L\}$, $L\in\mathcal{L}$.

Заметим, что множество номеров

$$
E_M=\bigcup_{\tau\in F_M}\alpha(P_{\tau,M})
$$

состоит из $2l_M$ элементов, поскольку для $L\in\mathcal{L}_M$ существуют ровно два номера k_1, k_2 этого множества, для которых $L_{k_1}=L_{k_2}=L$. Если τ_1 и τ_2 – концы отрезка L, то, очевидно, $k_s\in\alpha(P_{\tau_k,M})$. Выбор номеров k_s можно фиксировать по отношению к заданной ориентации контура ∂M. Именно, для каждого $k\in E_M$ существует единственная пара (i,p) с элементами $i\in P_M$ и $p=0,1$ такая, что $L_k=L^i$, причем движение по отрезку L_k с началом в его конце τ, который определяется условием $k\in\alpha(P_{\tau,M})$, совпадает с выбранной ориентацией контура ∂M при $p=0$ и противоположно этой ориентации при $p=1$. В результате получаем биекцию множества $P_M\times\{0,1\}$ на E_M, по отношению ко всем $M\in\mathcal{M}$ имеем биекцию $\{1,2,\dots,m_F\}\times\{0,1\}\to\{1,2,\dots,2m_F\}$, которую обозначим β.

Таким образом, если $k=\beta(i,p)$, $r=\beta(j,p)$, то соотношение $i,j\in Q_L$ равносильно тому, что $k,r\in\alpha(Q_{\tau,L})$ для некоторого $\tau\in F$. Поэтому по отношению к $(m_F \times m_F)$-матрице B с элементами

$$
\begin{aligned}
&B_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{m_L}, & i = j, \\ -\dfrac{2}{m_L}, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j \in Q_L, \quad m_L > 1, \\
&B_{ii} = \begin{cases} 1, & L \in \mathcal{L}(D), \\ -1, & L \in \mathcal{L}(H), \end{cases} \qquad Q_L = \{i\}, \\
&B_{ij} = 0 \qquad \text{в остальных случаях}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

определение (2.24) можно переписать в форме

$$
U_{kr} = \begin{cases} B_{ij} & \text{при } k = \beta(i, p), \quad r = \beta(j, p), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.27}
$$

§ 3. Фредгольмова разрешимость задачи D

Рассмотрим вопрос о фредгольмовости задачи D в пространстве $C_\lambda^\mu(K, F)$, $\lambda < 0$, гармонических на $\dot{K}(D)$ функций и ее индексе. Напомним, что задача *фредгольмова*, если фредгольмов отвечающий ей оператор $C_\lambda^\mu(K, F) \to C_\lambda^\mu[K^1(D), F(D)]$, определяемый краевым условием (1.4). Другими словами, пространство $\ker D$ решений однородной задачи конечномерно, и существует такое конечномерное подпространство $\operatorname{coker} D$ в сопряженном с $C_\lambda^\mu[K^1(D), F(D)]$!!!!!!!!!! пространстве, что условие ортогональности $f^*(f) = 0$, где $f^* \in \operatorname{coker} D$, необходимо и достаточно для разрешимости неоднородной задачи (1.4). Разность между размерностями ядра и коядра определяет индекс

$$
\varkappa(D) = \dim(\ker D) - \dim(\operatorname{coker} D)
$$

задачи D.

Пример ограниченных линейных функционалов над $C_\lambda^\mu[K^1(D), F(D)]$ доставляют функции $h \in C_{-\lambda-1+0}^\mu$, поскольку по определению этого класса в § 1 интеграл в равенстве

$$
h(f) = \int_{K^1(D)} f(y) h(y)\, ds_y
$$

имеет смысл. Запись $\operatorname{coker} D \subseteq C_{-\lambda-1+0}^\mu[K^1(D), F(D)]$ в дальнейшем означает, что все элементы коядра принадлежат к этому типу.

Теорема 3.1. *Пусть $\lambda < 0$ и*

$$
\det W_\tau(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta = \lambda_\tau, \qquad \tau \in F. \tag{3.1}
$$

Тогда задача D фредгольмова в пространстве $C_\lambda^\mu(K, F)$ и

$$
\ker D \subseteq C_{\lambda+0}^\mu(K, F), \qquad \operatorname{coker} D \subseteq C_{-\lambda-1+0}^\mu[K^1(D), F(D)]. \tag{3.2}
$$

При этом любое решение $u \in C_\lambda^\mu(K, F)$ задачи с правой частью $f \in C_\lambda^{1,\mu}[K^1(D), F(D)]$!!!!! принадлежит аналогичному классу $C_\lambda^{1,\mu}(K, F)$.

Доказательство. Задачу D переформулируем по отношению к семейству сужений $u_M = u|_M \in C_\lambda^\mu(M, F_M)$, гармонических внутри $M \in \mathcal{M}$. В обозначениях из § 1 это семейство принадлежит пространству $C_\lambda^\mu(\widehat{K}, F)$, причем на основании леммы 1.1 при дополнительном предположении непрерывности на ребрах верно и обратное.

С семейством $u = (u_M,\ M \in \mathcal{M})$ свяжем вектор $u^+ = (u_1^+, \dots, u_{m_F}^+)$ граничных значений по формуле

$$u_i^+ = u_M|_{L^i}, \qquad i \in P_M. \tag{3.3}$$

Удобно множество Q_L номеров i упорядочить в виде

$$Q_L = \{i_1, \dots, i_{m_L}\}. \tag{3.4}$$

Тогда условие непрерывности u на ребре L при $m_L > 1$ сводится к соотношениям

$$u_{i_k}^+ = u_{i_{k+1}}^+, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m_L - 1, \quad L \in \mathcal{L}(H), \tag{3.5}$$

а краевое условие (1.3) примет вид

$$u_i^+ = f|_{L^i}, \qquad L^i \in \mathcal{L}(D). \tag{3.6}$$

Соотношение (1.5), определяющее условие гармоничности на отрезках $L \notin \mathcal{L}(D)$, можно также рассматривать как краевое условие для семейства функций u_M, $M \in \mathcal{M}_L$. Однако декартова система координат, по отношению к которой рассматривается сопряженная функция в этом соотношении, "привязана" к ребру L. Удобно ее ввести для всех граней единым образом, что можно сделать с помощью ориентации контуров ∂M, $M \in \mathcal{M}$, введенной в § 2. Именно, декартову систему координат на грани M с началом в фиксированной точке x_M^0 внутри этой грани выберем так, чтобы при обходе ∂M в положительном направлении область M оставалась слева.

Пусть каждый отрезок $L \in \mathcal{L}$ также ориентирован определенным образом. Связь между этой ориентацией и выбранным направлением обхода контуров осуществляет вектор $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{m_F})$ с координатами $\sigma_i = \pm 1$, где для $i \in P_M$ выбирается верхний знак, если ориентация L^i совпадает с направлением обхода контура ∂M, и нижний знак в противном случае. Если граничные значения v_i^+ определяются аналогично (3.3), то в этих обозначениях в силу условий Коши–Римана

$$\left.\frac{\partial u_M}{\partial \nu_M}\right|_{L^i} = -\sigma_i (v_i^+)', \qquad i \in P_M,$$

где штрих обозначает производную вдоль L^i в соответствии с выбранным направлением на этом отрезке. В этих обозначениях (1.5) перейдет в соотношение

$$\sum_{i \in Q_L} \sigma_i v_i^+ = c_L, \qquad L \in \mathcal{L}(H), \tag{3.7}$$

с некоторыми постоянными $c_L \in \mathbb{R}$.

На основании леммы 1.2 и предположения $\lambda < 0$ гармоническая функция v_M принадлежит тому же классу $C^\mu_\lambda(M, F_M)$, что и u_M. В обозначениях из § 1 применительно к кусочно гармонической функции v этот факт выражается в форме $v \in C^\mu_\lambda(\widehat{K}, F)$.

Краевые условия (3.3)–(3.7) задачи Дирихле можно записать единым образом для кусочно-аналитической функции $\phi = u + iv$. С этой целью выберем гладкие параметризации $\gamma^i\colon [0,1] \to L^i$, $1 \leqslant i \leqslant m_F$, согласованные с ориентацией отрезков L^i, не зависящие от i на каждом множестве Q_L и подчиненные дополнительному требованию $|(\gamma^i)'(t)| \equiv 1$ в окрестности концов отрезка $[0,1]$. С помощью этих параметризаций граничные значения ϕ_i^+ можно “снести” с L^i на отрезок $[0,1]$, т. е. ввести m_F-вектор ϕ_γ^+ с координатами

$$\phi^+_{\gamma,i}(t) = \phi_i^+[\gamma^i(t)], \qquad 0 < t < 1. \tag{3.8}$$

В обозначениях (3.4) рассмотрим постоянную $(m_F \times m_F)$-матрицу A с элементами

$$\begin{gathered}
A_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = i_k, \quad k < m_L, \\ -1, & i = i_k, \quad k < m_L, \quad j = i_{k+1}, \\ \sigma_i \mathbf{i}, & i = i_{m_L}, \quad j = i_r, \quad 1 \leqslant r \leqslant m_L, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad i, j \in Q_L, \quad m_L > 1, \\
A_{ii} = \begin{cases} 1, & L \in \mathcal{L}(D), \\ \sigma_i \mathbf{i}, & L \in \mathcal{L}(H), \end{cases} \qquad \{i\} = Q_L, \\
A_{ij} = 0 \qquad \text{в остальных случаях,}
\end{gathered} \tag{3.9}$$

где $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ – мнимая единица.

С помощью матрицы (3.9) краевые условия (3.5)–(3.7) задачи Дирихле запишутся кратко в форме

$$\operatorname{Re} A\phi_\gamma^+ = \widetilde{f} + \sum_{L \in \mathcal{L}(H)} c_L e_L, \tag{3.10}$$

где в обозначениях (3.4) m_F-векторы $\widetilde{f}$ и e_L определяются по формулам

$$\widetilde{f}_i(t) = \begin{cases} f[\gamma^i(t)], & L^i \in \mathcal{L}(D), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$e_L = \begin{cases} 1, & i = i_{m_L} \in Q_L, \quad m_L > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В общем случае для кусочно аналитической функции $\phi \in C^\mu_\lambda(\widehat{K}, F)$ компоненты (3.8) ее граничного значения ϕ_γ^+ принадлежат пространству $C^\mu_{\lambda^i}([0,1]; 0, 1)$ с весовым порядком $\lambda^i = (\lambda^i_0, \lambda^i_1)$, зависящим от $1 \leqslant i \leqslant m_F$. Он определяется следующим образом: $\lambda^i_p = \lambda_\tau$, где τ – конец ориентированного отрезка L^i_p, левый или правый в зависимости от значения $p = 0$ или $p = 1$. В частности, λ^i_p не зависит от $i \in Q_L$. Полученное семейство $(\lambda^i_p,\ 1 \leqslant i \leqslant m_F,\ p = 0, 1)$

записываем также λ. В этих обозначениях оператор $\phi \to \phi^+_\gamma$ ограничен $C^\mu_\lambda(\widehat{K}, F) \to C^\mu_\lambda([0,1]; 0, 1)$ и можно рассмотреть общую краевую задачу R, определяемую краевым условием

$$\operatorname{Re} A\phi^+_\gamma = g. \tag{3.11}$$

Соответственно, конечномерно возмущенную задачу

$$\operatorname{Re} A\phi^+_\gamma = g + \sum_{L \in \mathcal{L}(H)} c_L e_L \tag{3.12}$$

относительно пары (ϕ, c), где $c = (c_L,\ L \in \mathcal{L}(H)) \in \mathbb{R}^{l(H)}$, обозначаем как задачу $\widetilde{R}$. Очевидно, если (ϕ, c) – решение последней задачи с правой частью $\widetilde{f}$, то $u = \operatorname{Re}\phi$ является решением задачи (3.5)–(3.7). Обратно, если u – решение задачи Дирихле, то $\phi = u + iv$ является решением задачи (3.12). Для решения (ϕ, c) однородной задачи $\widetilde{R}$ равенство $\operatorname{Re}\phi = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $\phi = i\xi$, где $\xi_M \in \mathbb{R}$, и

$$c_L = \sum_{i \in Q_L} c_i \xi^+_i.$$

Поэтому размерности пространств однородных задач связаны соотношением

$$\dim(\ker D) = \dim(\ker \widetilde{R}) - m. \tag{3.13}$$

Напомним, что в каждом многоугольнике M выбрана прямоугольная декартова система координат с началом в некоторой точке x^0_M. Она определяется единичными ортами $a_M, b_M \in \mathbb{R}^3$ вдоль координатных осей, и связь между точками $x \in \mathbb{R}^3$ и $z \in \mathbb{C}$ осуществляется взаимно обратными формулами

$$x - x^0_M = (\operatorname{Re} z) a_M + (\operatorname{Im} z) b_M, \qquad z = (x - x^0_M, a_M) + i(x - x^0_M, b_M), \tag{3.14}$$

где (x, y) – скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$. По отношению к этой системе координат многоугольник M можно рассматривать как замкнутую область $\overline{D}_M$ комплексной плоскости с множеством угловых точек F_M. Удобно однако для отрезков L^i и их параметризаций γ^i сохранять прежние обозначения. В этом случае γ^i представляют собой комплекснозначные функции, получающиеся из предыдущих вектор-функций по формулам (3.14). При этом сигнатура ориентации σ_i для $i \in P_M$ имеет тот же смысл, что и ранее, т. е. $\sigma_i = 1$, если отрезок L^i ориентирован положительно по отношению к D_M, и $\sigma_i = -1$ в противном случае.

Для функции ϕ_M по отношению к области D_M также сохраняем прежние обозначения, в этом случае они аналитичны в этой области. Отметим, что для различных граней M области D_M между собой никак не связаны. Однако на комплексной плоскости точкам $\gamma^i(t) \in L^i \subseteq \partial D_M$, $i \in Q_L$, отвечает одна точка $\gamma^i(t) \in L$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Через $C^\mu_\lambda(\widehat{D}, F)$ обозначаем соответствующее пространство семейств $\phi = (\phi_M)$ аналитических функций. В результате имеем так называемую нелокальную краевую задачу R Римана, изученную в [7], [11] (обозначения см. также в [9]).

С $(m_F \times m_F)$-матрицей A свяжем матрицу A^σ с элементами

$$(A^\sigma)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \sigma_j = 1, \\ \overline{A}_{ij}, & \sigma_j = -1. \end{cases}$$

Другими словами, элементы j-го столбца матриц A и A^σ совпадают, если $\sigma_j = 1$, и комплексно сопряжены, если $\sigma_j = -1$. Очевидно, матрица A^σ определяется той же формулой (3.9), где все $\sigma_j = 1$. Как и A, эта матрица блочно-диагональна относительно разбиения Q_L, $L \in \mathcal{L}$. Непосредственно проверяется, что каждый из диагональных блоков $A(Q_L) = (A_{ii'},\ i, i' \in Q_L)$ этой матрицы обратим, так что $\det A^\sigma \neq 0$. Следовательно, по терминологии [7] рассматриваемая задача R относится к нормальному типу.

В дальнейшем основную роль будет играть матрица $(A^\sigma)^{-1}\overline{A}^\sigma$, которую в соответствии с (3.9) легко вычислить явно. Рассмотрим блок $A^\sigma(Q_L)$, отвечающий множеству (3.4). По отношению к нумерации этого множества можем записать

$$A^\sigma(Q_L) = dC, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

с диагональной матрицей $d = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, i)$. Нетрудно видеть, что

$$C^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & n-3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1-n & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

где для краткости $n = m_L$. Отсюда

$$[(A^\sigma)^{-1}\overline{A}^\sigma](Q_L) = C^{-1}d^2C = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-2 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 \\ -2 & n-2 & -2 & \dots & -2 & -2 \\ -2 & -2 & n-2 & \dots & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & -2 & -2 & \dots & n-2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & \dots & -2 & n-2 \end{pmatrix}.$$

Что касается случая $Q_L = \{i\}$ одномерных блоков, то в этом случае $[(A^\sigma)^{-1}\overline{A}^\sigma]_{ii}$ принимает значение 1, если на L заданы данные Дирихле, и -1 в противном случае. Таким образом, $(A^\sigma)^{-1}\overline{A}^\sigma$ в точности совпадает с матрицей B, фигурирующей в (2.26).

С задачей R естественным образом связано понятие концевого символа – аналитической на всей плоскости матрицы-функции $W(\zeta) = U + V(\zeta)$, где матрица U зависит только от A^σ, а матрица $V(\zeta)$ – от геометрии области. Согласно [9] эти матрицы определяются формулами (2.25)–(2.27). Таким образом, матрица W блочно-диагональна относительно разбиения $E=(E_\tau,\tau\in F)$, и ее диагональный блок $W(E_\tau)$ с точностью до перенумерации (2.23) ее элементов совпадает с W_τ. В частности, $\det W(\zeta)=\prod_\tau \det W_\tau(\zeta)$, и соответствующая характеристика $\chi(\lambda)$ совпадает с суммой $\sum_\tau \chi_\tau(\lambda)$ целочисленных функций, фигурирующих в (2.7).

Кроме того, с задачей R в классе C^μ_λ связана союзная с ней однородная задача R^*, рассматриваемая в союзном классе $C^\mu_{-\lambda-1+0}$ и определяемая краевым условием

$$\operatorname{Re} A^*\psi^+_\gamma=0, \qquad A^*=[((A^\sigma)^{-1})^\top]^\sigma e, \tag{3.17}$$

где $\top$ – символ матричного транспонирования, под e понимается диагональная матрица $\operatorname{diag}(e_1,\dots,e_{m_F})$ с элементами $e_i=(\gamma^j)'$.

Связь между задачами R и R^* описывается с помощью билинейной формы

$$\langle g,g^*\rangle=\sum_{i=1}^{m_F}\int_0^1 g_i(t)g_i^*(t)\,dt, \tag{3.18}$$

которая имеет смысл для любых m-вектор-функций $g\in C^\mu_\lambda([0,1];0,1)$ и $g^*\in C^\mu_{-\lambda-1+0}([0,1];0,1)$. Эта связь заключается в тождестве

$$\langle \operatorname{Re} A\phi^+_\gamma,\,\sigma \operatorname{Im} A^*\psi^+_\gamma\rangle+\langle \operatorname{Im} A\phi^+_\gamma,\,\sigma \operatorname{Re} A^*\psi^+_\gamma\rangle=0 \tag{3.19}$$

с диагональной матрицей $\sigma=\operatorname{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_{m_F})$, которое справедливо для любых кусочно аналитических функций $\phi\in C^\mu_\lambda(\widehat{D},F)$, $\psi\in C^\mu_{-\lambda-1+0}(\widehat{D},F)$.

Для доказательства тождества (3.19) операцию $x\to x^\sigma$ распространим на комплексные m-векторы x, полагая $x^\sigma_i=x_i$ при $\sigma_i=1$ и $x^\sigma_i=\overline{x_i}$ в противном случае. Тогда $(Ax)^\sigma=A^\sigma x^\sigma$ и $\operatorname{Im}(x^\sigma)_i=\sigma_i(\operatorname{Im} x)^\sigma_i$. Поэтому левую часть (3.19) можем записать в форме

$$\operatorname{Im}\langle A\phi^+_\gamma,\sigma A^*\psi^+_\gamma\rangle=\operatorname{Im}\big\langle A^\sigma(\phi^+_\gamma)^\sigma,(A^*)^\sigma(\psi^+_\gamma)^\sigma\big\rangle=\operatorname{Im}\langle(\phi^+_\gamma)^\sigma,e^\sigma(\psi^+_\gamma)^\sigma\rangle,$$

где учтено равенство $(A^\sigma)^\top(A^*)^\sigma=e^\sigma$, вытекающее из определения (3.17). В свою очередь, правую часть последнего равенства можем записать в форме

$$\operatorname{Im}\langle\phi^+_\gamma,\sigma e\psi^+_\gamma\rangle=\operatorname{Im}\sum_{M\in\mathcal{M}}\sum_{i\in P_M}\sigma_i\int_0^1\phi^+_{\gamma,i}(t)\psi^+_{\gamma,i}(t)e_i(t)\,dt.$$

Согласно определению e_i в (3.17), переходя к комплексным координатам (3.14), внутреннюю сумму можем записать в форме интеграла

$$\int_{\partial D_M}\phi^+_M(z)\psi^+_M(z)\,dz,$$

где контур ∂D_M ориентирован положительно по отношению к D_M, который по теореме Коши равен нулю. Поскольку эта функция $\phi_M(z)\psi_M(z)$ непрерывна в $\overline{D_M}\setminus F_M$ и в точках $\tau\in F_M$ допускает особенности порядка меньше единицы, применение этой теоремы правомерно. Тем самым тождество (3.19) установлено.

Тождество (3.19) означает, что класс вектор-функций

$$\bigl\{\operatorname{Im}\sigma A^*\psi^+_\gamma,\ \psi\in\ker R^*\bigr\} \tag{3.20}$$

по отношению к билинейной форме (3.18) содержится в коядре $\operatorname{coker} R$ задачи R.

Согласно [11] для этой задачи имеет место следующий результат. Нужно только принять во внимание, что выполнение условия (3.1) влечет справедливость аналогичного условия в окрестности весового порядка λ.

Предложение 3.1. *Пусть выполнено условие* (3.1) *с произвольным весовым порядком λ. Тогда задача R фредгольмова в пространстве $C^\mu_\lambda(\widehat{D},F)$ и ее индекс дается формулой*

$$\varkappa(R)=m-\sum_{\tau\in F}\chi_\tau(\lambda_\tau). \tag{3.21}$$

При этом

$$\bigl\{\phi\in C^\mu_\lambda(\widehat{D},F)\mid R\phi\in C^\mu_{\lambda+0}([0,1];0,1)\bigr\}\subseteq C^\mu_{\lambda+0}(\widehat{D},F)$$

и, в частности, $\ker R\subseteq C^\mu_{\lambda+0}(\widehat{D},F)$. *Коядро* $\operatorname{coker} R$ *задачи R по отношению к билинейной форме* (3.18) *содержится в классе $C^\mu_{-\lambda-1+0}([0,1];0,1)$ и описывается равенством* (3.20).

Предложение 3.2. *Пусть в условиях* (i) *компоненты g_i, $i\in Q_L$, правой части g задачи принадлежат $C^{1,\mu}_{\lambda^i}([0,1];0,1)$. Тогда для любого решения $\phi\in C^\mu_\lambda(\widehat{D},F)$ этой задачи с правой частью g компоненты ϕ^+_i, $i\in Q_L$, граничных значений принадлежат $C^{1,\mu}_{\lambda^i}(L,F_L)$. В частности, любое решение $\phi\in C^\mu_\lambda(\widehat{D},F)$ задачи с правой частью $g\in C^{1,\mu}_\lambda([0,1];0,1)$ принадлежит $C^{1,\mu}_\lambda(\widehat{D},F)$.*

Обратимся к задаче $\widetilde{R}$, рассматриваемой для пары (ϕ,c), где $\phi\in C^\mu_\lambda$ и $c=(c_L, L\in\mathcal{L}(H))\in\mathbb{R}^{l(H)}$. Поскольку по условию имеем $\lambda<0$, постоянные векторы e_L, фигурирующие в (3.10), принадлежат классу $C^\mu_\lambda([0,1],\,0,1)$. Оператор этой задачи, действующий из $C^\mu_\lambda\times\mathbb{R}^{l(H)}$ в $C^\mu_\lambda([0,1];0,1)$, является конечномерным расширением R на $l(H)$ измерений, поэтому в силу хорошо известных свойств [12] фредгольмовых операторов эти операторы фредгольмово эквивалентны и их индексы связаны соотношением

$$\varkappa(\widetilde{R})=\varkappa(R)+l(H). \tag{3.22}$$

Важно отметить, что предложение 3.2 сохраняет свою силу без изменений и для задачи $\widetilde{R}$, достаточно правую часть (3.12) обозначить снова g и применить к этой функции рассматриваемое предложение. Таким образом, ядро $\ker D$ конечномерно и содержится в $C^\mu_{\lambda+0}(K,F)$. Из этих же соображений получается и последнее утверждение теоремы о гладкости решения.

Как было отмечено выше, с точки зрения разрешимости задача D эквивалентна задаче $\widetilde{R}$ с правой частью $\widetilde{f}$, фигурирующей в (3.10). Таким образом, неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i, L^i \in \mathcal{L}(D)} \int_0^1 f[\gamma^i(t)] h_i(t)\, dt = 0, \qquad h \in \operatorname{coker} \widetilde{R}.$$

Следовательно, задача D фредгольмова, ее коядро содержится в $C^\mu_{-\lambda-1+0}$ и определяется равенством

$$\operatorname{coker} D = \big\{(h_i, L^i \in \mathcal{L}(D)),\ h \in \operatorname{coker} \widetilde{R}\big\}. \tag{3.23}$$

В силу (3.13) имеем:

$$\varkappa(D) = \dim(\ker \widetilde{R}) - m - \dim(\operatorname{coker} D) = \varkappa(\widetilde{R}) - m + \big[\dim(\operatorname{coker} \widetilde{R}) - \dim(\operatorname{coker} D)\big],$$

что совместно с (3.21), (3.22) приводит к равенству

$$\varkappa(D) = l(H) - \sum_{\tau \in F} \chi_\tau(\lambda_\tau) + s, \qquad s = \dim(\operatorname{coker} \widetilde{R}) - \dim(\operatorname{coker} D), \tag{3.24}$$

где в силу (3.23) имеем $s \geqslant 0$.

Заметим, что согласно предложению 3.2 последнее утверждение теоремы справедливо по отношению к отрезкам $L \in \mathcal{L}$ в отдельности. Именно, на каждом ребре $L \in \mathcal{L}(H)$ решение $u \in C^\mu_\lambda(K, F)$ задачи Дирихле принадлежит классу $C^{1,\mu}_\lambda(L, F_L)$. В предположении, что $f \in C^{1,\mu}(L, F_L)$, это утверждение верно и для $L \in \mathcal{L}(D)$. Таким образом, выполнение условия (1.5) автоматически означает, что сужения u_M непрерывно дифференцируемы вплоть до внутренних точек ребер $L \in \mathcal{L}(H)$, входящих в границу ∂M, и удовлетворяют условию (1.3). Тем самым теорема установлена.

Отметим особо случай $\mathcal{L}(D) = \varnothing$, когда краевые условия (1.4) вообще отсутствуют. Другими словами, речь идет о функциях $u \in C^\mu_\lambda$, гармонических на $K \setminus F$. В этом случае в обозначениях доказательства теоремы 3.1 для ϕ имеем задачу (3.10) с $g = 0$. Поскольку класс таких правых частей данной задачи конечномерен, конечномерен и класс рассматриваемых гармонических функций u. Ясно, что этот класс содержится в $C^\mu_{\lambda+0}(K, F)$.

При некоторых предположениях относительно комплекса K в выражении (3.24) для индекса имеем $s = 0$. Напомним, что множество $\mathcal{M}(D)$ состоит из граней, по крайней мере одна сторона которой принадлежит $\mathcal{L}(D)$. Введем более широкое множество $\mathcal{M}^1$ граней M, от которых можно перейти к некоторой грани $M_0 \in \mathcal{M}(D)$ по последовательности граней, которые попарно граничат по ребрам кратности 2. Таким образом, $\mathcal{M}^1$ содержит $\mathcal{M}(D)$ и некоторое подмножество $\mathcal{M}(H)$. Совокупность отрезков, являющихся сторонами одной или нескольких граней из $\mathcal{M}^1$, обозначим $\mathcal{L}^1$.

Теорема 3.2. *Пусть либо каждая грань M комплекса K принадлежит $\mathcal{M}^1$, либо все ее стороны, являющиеся ребрами кратности больше 1, принадлежат $\mathcal{L}^1$ и образуют связное подмножество ∂M. Тогда в условиях теоремы 3.1 индекс задачи Дирихле задается формулой*

$$\varkappa(D) = l(H) - \sum_{\tau \in F} \chi_\tau(\lambda_\tau). \tag{3.25}$$

Доказательство. Согласно (3.23) достаточно убедиться в том, что отображение $h \to (h_i, L^i \in \mathcal{L}(D))$ взаимно однозначно на конечномерном пространстве $\operatorname{coker} R$. Поскольку $\operatorname{coker} \widetilde{R} \subseteq \operatorname{coker} R$, отсюда будет следовать равенство $s = 0$ в (3.24).

Рассмотрим подробнее однородную задачу R^*, определяемую краевым условием (3.17). В этом краевом условии матрица A^* блочно-диагональна относительно разбиения Q и в условиях (3.9) ее Q_L-й диагональный блок порядка $n = m_L > 1$ может быть описан аналогично (3.15), (3.16) равенством

$$A^*_{ij} = \begin{cases} [(C^{-1})^\top]_{kr} e_j, & i = i_k, \quad j = i_r, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ -\sigma_j \mathbf{i} e_j, & i = i_n, \quad j = i_r, \quad 1 \leqslant r \leqslant n, \end{cases}$$

где учтено, что $[(C^{-1})^\top]_{nr} = 1$. В случае одномерного блока $Q_L = \{i\}$ имеем равенства $A^*_{ii} = e_i$, если $L \in \mathcal{L}(D)$, и $A^*_{ii} = -\sigma_i \mathbf{i} e_i$ в противном случае.

По отношению к нумерации $i = i_k$, $j = i_r$ переменных множества Q_L положим для краткости $e_j \psi^+_{\gamma,j} = \xi_r$. Тогда выделенные $n = m_L$ соотношений

$$\operatorname{Re} \sum_{j \in Q_L} A^*_{ij} \psi^+_{\gamma,j} = 0, \qquad i \in Q_L,$$

можно записать в форме

$$\begin{gathered} \sum_{r=1}^{n} [(C^{-1})^\top]_{kr} \operatorname{Re} \xi_r = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \sum_{r=1}^{n} \sigma_{i_r} \operatorname{Im} \xi_r = 0, \qquad k = n. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Согласно (3.15), (3.16) имеем $(C^\top)_{sn} = 1$, $[(C^{-1})^\top]_{nr} = 1/n$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1} (C^\top)_{sk} [(C^{-1})^\top]_{kr} = \delta_{sr} - (C^\top)_{sn} [(C^{-1})^\top]_{nr} = \delta_{sr} - \frac{1}{n},$$

где δ_{sr} – символ Кронекера. Поскольку $((n-1) \times (n-1))$-матрица с элементами $(C^\top)_{sk}$, $1 \leqslant s, k \leqslant n-1$, обратима, соотношения (3.26) равносильны системе

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} \xi_k = \frac{1}{n} \operatorname{Re}(\xi_1 + \dots + \xi_n), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \sum_{r=1}^{n} \sigma_{i_r} \operatorname{Im} \xi_r = 0, \qquad k = n. \end{gathered}$$

Применительно к исходным обозначениям они приводят к соотношениям

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} e_i \psi^+_{\gamma,i} = \operatorname{Re} e_j \psi^+_{\gamma,j}, \qquad i, j \in Q_L, \\ \sum_{i \in Q_L} \sigma_i \operatorname{Im} e_i \psi^+_{\gamma,i} = 0, \qquad m_L > 1. \end{gathered} \tag{3.27}$$

В случае $Q_L = \{i\}$ имеем равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e_i \psi^+_{\gamma,i} &= 0, \qquad \{i\} = Q_L, \quad L \in \mathcal{L}(D), \\ \operatorname{Im} e_i \psi^+_{\gamma,i} &= 0, \qquad \{i\} = Q_L, \quad L \in \mathcal{L}(H). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Предположим теперь, что для некоторого $h \in \operatorname{coker}\widetilde{R}$ все компоненты h_i с номерами i, $L^i \in \mathcal{L}(D)$, обращаются в нуль. Необходимо доказать, что тогда $h = 0$. Согласно (3.20) имеем равенство $h = \operatorname{Im}\sigma A^*\psi^+_\gamma$ для некоторой функции $\psi \in \ker R^*$, так что $\operatorname{Im} A^*_{ii}\psi^+_{\gamma,i} = 0$ при $L^i \in \mathcal{L}(D)$. Однако по определению (3.17) однородной задачи R^* для этих номеров выполняется и равенство $\operatorname{Re} A^*_{ii}\psi^+_{\gamma,i} = 0$. Следовательно, $A^*_{ii}\psi^+_{\gamma,i} = 0$. Поскольку одномерный диагональный блок A^*_{ii} обратим, то $\psi^+_{\gamma,i} = 0$. Итак, граничное значение ψ^+_i равно нулю при $L^i \in \mathcal{L}(D)$. Если L^i является стороной многоугольника D_M, то в силу теоремы единственности для аналитических функций отсюда $\psi_M = 0$ в области D_M. Таким образом, функция ψ равна нулю в каждом многоугольнике D_M, $M \in \mathcal{M}(D)$.

Покажем далее, что ψ обращается в нуль в многоугольниках $M \in \mathcal{M}^1$. По определению существует такая последовательность граней $M_0, \dots, M_s$ и ребер $L_1, \dots, L_s$ кратности 2, что $M_0 \in \mathcal{M}(D)$, $M_s = M$ и при каждом i грани M_i, M_{i-1} граничат по ребру L_i. Тогда по доказанному выше $\psi|_{M_0} = 0$. На ребре $L = L_1$ выполняются условия (3.27) с $m_L = 2$, из которых следует, что реальная и мнимая части функции $\psi|_{M_0}$ обращаются в нуль на L. Следовательно, $\psi|_{M_1} = 0$, и, продолжая эту процедуру, получим $\psi|_{M_i} = 0$ для всех i. Таким образом, $\psi|_M = 0$ на каждой грани $M \in \mathcal{M}^1$.

Рассмотрим грань M, не принадлежащую $\mathcal{M}^1$, и пусть L – ее сторона, являющаяся ребром комплекса кратности $m_L > 1$. Тогда L является также стороной некоторой грани из $\mathcal{M}^1$, на которой по доказанному выше функция ψ равна нулю. Следовательно, одно из граничных значений ψ^+_i, $i \in Q_L$, обращается в нуль, и с учетом первого соотношения в (3.27) отсюда имеем

$$\operatorname{Re} e_i\psi^+_{\gamma,i} = 0, \qquad i \in Q_L, \quad m_L > 1.$$

С другой стороны, по предположению стороны M, являющиеся сторонами комплекса K, образуют связное подмножество ∂M. На этих сторонах имеем краевое условие

$$\operatorname{Im} e_i\psi^+_{\gamma,i} = 0, \qquad i \in Q_L, \quad m_L = 1.$$

Таким образом, на границе области D_M функция ψ_M удовлетворяет смешанным краевым условиям (3.28), причем носители условий одного типа образуют связное подмножество границы. Рассмотрим аналитическую функцию $\Psi_M \in C(\overline{D}_M)$, производная которой совпадает с ψ_M. Тогда в комплексных обозначениях (3.14) имеем соотношение $[(\Psi)^+_{\gamma,j}]' = e_j\psi^+_{\gamma,j}$, где штрих обозначает дифференцирование вдоль отрезка L. Таким образом, по отношению к Ψ_M краевое условие (3.28) означает, что $\operatorname{Im}\Psi^+_i = \mathrm{const}$ на сторонах $L \in \mathcal{L}(H)$ многоугольника D_M и $\operatorname{Re}\Psi^+_i = \mathrm{const}$ на его сторонах $L \in \mathcal{L}(D)$. На основании следующей леммы это возможно, только когда функция Ψ_M постоянна. Таким образом, функция ψ равна нулю и на гранях $M \in \mathcal{M}^0(H)$.

Лемма 3.1. *Пусть задан многоугольник M на комплексной плоскости с множествами F и $\mathcal{L}$ соответственно вершин τ и сторон L. Пусть функция $\phi \in C(\overline{D} \setminus F)$ аналитична в области D и в точках $\tau \in F$ допускает оценку*

$$\phi(z) = O(|z-\tau|^{\lambda_\tau}) \qquad \text{при} \quad z \to \tau, \quad \lambda_\tau > -\frac{1}{2}. \tag{3.29}$$

Тогда если на каждой из сторон $L \in \mathcal{L}$ выполнено одно из краевых условий

$$\operatorname{Re}\phi|_L = \xi_L, \qquad \operatorname{Im}\phi|_L = \xi_L \tag{3.30}$$

с некоторыми $\xi_L \in \mathbb{R}$, причем объединение отрезков с краевыми условиями одного типа связно, то функция ϕ постоянна.

Доказательство. Лемма является по существу следствием известной формулы Келдыша–Седова [10] в полуплоскости. Выберем точку $a \in \partial D \setminus F$ и рассмотрим конформное отображение $\tilde{z} = \omega(z)$, переводящее D на верхнюю полуплоскость $\tilde{D}$ с условием $\omega(a) = \infty$. Как и при доказательстве леммы 1.2, убеждаемся в том, что $\tilde{\phi}(\tilde{z}) = \phi(z)$ удовлетворяет аналогичной (3.29) оценке в точках $\tilde{\tau} = \omega(\tau)$. Поэтому, не используя волну в обозначениях, можно с самого начала считать, что D является верхней полуплоскостью, причем ϕ ограничена в окрестности ∞. Пусть $\tau \in F$ и $X_\tau(z) = 1$, если к τ примыкают отрезки L с краевыми условиями (3.30) одного типа, и $X_\tau(z) = \sqrt{z-\tau}$ в противном случае. Тогда с учетом (3.29) найдем такую комплексную постоянную C_τ, что функция $\phi_0(z) = [\phi(z) - C_\tau]/X_\tau(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки τ и допускает в ней слабую особенность. Поэтому эта функция аналитична в этой окрестности.

По предположению отрезки с краевыми условиями (3.30) одного типа образуют связное множество. Поэтому либо выполнено одно из краевых условий (3.30) на всей прямой и в этом случае ϕ постоянна, либо на некотором отрезке $[a, b]$ выполнено одно из этих краевых условий, а на его дополнении – второе из них. В последнем случае функция $\psi(z) = \phi'(z)\sqrt{(z-a)(z-b)}$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость и исчезает на ∞. Следовательно, $\phi' = 0$ и в этом случае, что завершает доказательство леммы.

Применим теорему 3.2 в ситуации, когда заданы весовые порядки $\lambda' \leqslant \lambda'' < 0$ и при каждом $\tau \in F$ функция $\det W_\tau(\zeta)$ не имеет нулей на прямых $\operatorname{Re}\zeta = \lambda'_\tau$ и $\operatorname{Re}\zeta = \lambda''_\tau$. Обозначим через s_τ число всех нулей функции $\det W_\tau(\zeta)$ в полосе $\lambda'_\tau \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant \lambda''_\tau$, взятому с учетом их кратности. Тогда в условиях теоремы 3.2 для индексов $\varkappa'$ и $\varkappa''$ задачи D в классе C^μ_λ с соответственно $\lambda = \lambda'$ и $\lambda = \lambda''$ имеем равенство

$$\varkappa' - \varkappa'' = \sum_\tau s_\tau.$$

С другой стороны,

$$\ker(D|C^\mu_{\lambda''}) \subseteq \ker(D|C^\mu_{\lambda'}), \qquad \operatorname{coker}(D|C^\mu_{\lambda'}) \subseteq \operatorname{coker}(D|C^\mu_{\lambda''}),$$

так что справедливы разложения в прямые суммы

$$\ker(D|C^\mu_{\lambda'}) = X \oplus \ker(D|C^\mu_{\lambda''}), \qquad \operatorname{coker}(D|C^\mu_{\lambda''}) = Y \oplus \operatorname{coker}(D|C^\mu_{\lambda'}).$$

В соответствии с определением индекса отсюда приходим к соотношению

$$\dim X + \dim Y = \sum_\tau s_\tau \tag{3.31}$$

для размерностей конечномерных пространств X и Y в этих разложениях.

В частности, если условие (3.1) выполнено для всех λ между λ' и λ'', то правая часть равенства (3.31) обращается в нуль и, следовательно, каждое из пространств X и Y является нулевым. В результате приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.2.

Определение комплекса K можно несколько расширить в случае, когда роль сторон (т. е. ребер L с $m_L = 1$) играют гладкие дуги. Предложения 3.1, 3.2 сохраняют свою силу, поэтому теоремы 3.1, 3.2 справедливы и для данных комплексов.

До сих пор весовой порядок λ был отрицательным. Рассмотрим задачу в пространстве C^μ_λ, где для некоторого подмножества $F_0 \subseteq F$ весовой порядок подчинен условиям

$$0 < \lambda_\tau < 1, \quad \tau \in F_0; \qquad \lambda_\tau < 0, \quad \tau \in F \setminus F_0. \tag{3.32}$$

Целесообразно пространство C^μ_λ несколько расширить. Именно, введем класс $C^\mu_{(\lambda)}(K,F)$ всех непрерывных на $K \setminus F$ функций φ, которые принадлежат C^μ вне любой окрестности множества F, а в пересечении K с шаром $B_\tau = \{|x - \tau| \leqslant \rho\}$ с центром $\tau \in F$, где $\rho > 0$ достаточно мало, удовлетворяют условию $u(x) - u(\tau) \in C^\mu_{\lambda_\tau}(K \cap B_\tau, \tau)$ при $\tau \in F_0$ и условию $u(x) \in C^\mu_{\lambda_\tau}(K \cap B_\tau, \tau)$ при $\tau \notin F_0$. Очевидно, это пространство является конечномерным расширением C^μ_λ и банахово относительно соответствующей нормы. В случае $F_0 = F$ и $\lambda = \mu$ оно совпадает с $C^\mu(K)$.

Точно так же вводится пространство $C^\mu_{(\lambda)}(\widehat{K}, F)$ кусочно непрерывных функций и соответствующие пространства дифференцируемых функций. Аналогичным образом все эти пространства определяются и на $K^1(D)$ по отношению к $F(D)$. В принятых обозначениях лемму 1.2 можно сформулировать следующим образом: если гармоническая на $\dot{K}(D)$ функция u принадлежит классу $C^\mu_\lambda(K,F)$, то сопряженная функция v принадлежит классу $C^\mu_{(\lambda)}(\widehat{K}, F)$.

Обозначим через $\widetilde{C}^\mu_\lambda(K,F)$ класс всех гармонических на $\dot{K}(D)$ функций $u \in C^\mu_\lambda(K,F)$, которые допускают сопряженную функцию $v \in C^\mu_\lambda(\widehat{K}, F)$. Очевидно, этот класс является замкнутым подпространством C^μ_λ, и возникает вопрос о его коразмерности, т. е. размерности фактор-пространства $C^\mu_\lambda / \widetilde{C}^\mu_\lambda$.

Лемма 3.3. *Коразмерность $\widetilde{m}$ подпространства $\widetilde{C}^\mu_\lambda$ задается равенством*

$$\widetilde{m} = m_{F_0} - l^0(H) - m^0, \qquad m_{F_0} = \sum_{\tau \in F_0} m_\tau, \tag{3.33}$$

где $l^0(H)$ – число ребер $L \in \mathcal{L}(H)$, оба конца которых принадлежат F_0, и m^0 – число граней M, множество F_M вершин которых имеет непустое пересечение с F_0.

Доказательство. Пусть множество $\mathcal{L}^0(H)$ состоит из ребер $L \in \mathcal{L}(H)$, оба конца которых принадлежит F_0, и $\mathcal{M}^0$ состоит из граней M, множество F_M вершин которых имеет непустое пересечение с F_0. Пусть функция $u \in C^\mu_\lambda$

гармонична на $\dot K(D)$ и v – сопряженная к ней функция. Рассмотрим семейство

$$\xi_{\tau,M} = v_M(\tau), \qquad \tau \in F_0, \quad M \in \mathcal{M}_\tau, \tag{3.34}$$

ее значений в точках $\tau \in F$. Сужение $v_M = v\big|_M$ определено здесь с точностью аддитивной постоянной, поэтому v можно однозначно выбрать по условиям

$$\sum_{\tau \in F_M} \xi_{\tau,M} = 0, \qquad M \in \mathcal{M}^0. \tag{3.35}$$

Соотношение (3.6), определяющее гармоничность u на ребре $L \in \mathcal{L}(H)$, можно записать в форме

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_L} \sigma_M(v_M)|_L = c_L, \qquad L \in \mathcal{L}(H),$$

где $\sigma_M = 1$, если ориентированный отрезок L согласован с обходом контура ∂M в положительном направлении, и $\sigma_M = -1$ в противном случае. Поэтому в соответствии с определением множества $\mathcal{L}^0(H)$ величины (3.34) удовлетворяют также соотношению

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_L} \sigma_M(\xi_{\tau,M} - \xi_{\tau',M}) = 0, \qquad L \in \mathcal{L}^0(H), \quad F_L = \{\tau, \tau'\}. \tag{3.36}$$

Покажем, что верно и обратное: для заданного семейства $\xi = (\xi_{\tau,M}) \in \mathbb{R}^{m_{F_0}}$ со свойствами (3.35), (3.36) существует такая гармоническая на $\dot K(D)$ функция $u \in C^\mu_\lambda$, сопряженная к которой кусочно гармоническая функция v принимает значения (3.34). С этой целью как и при доказательстве теоремы 3.1, рассмотрим в классе $C^\mu_{(\lambda)}$ задачу $\widetilde R$ для семейства аналитических функций $\phi_M = (u_M + iv_M,\ M \in \mathcal{M})$. Эта задача является конечномерным расширением аналогичной задачи в классе C^μ_λ. Предложения 3.1, 3.2 справедливы для любого весового порядка. Поэтому в предположении (3.1) обе эти задачи фредгольмовы. Следовательно, произвол в выборе ее правой части $\widetilde f \in C^\mu_\lambda([0,1];\ 0,1)$ можно подчинить дополнительному требованию (3.34), так что функция $u = \operatorname{Re}\phi$ будет искомой. Если условие (3.1) нарушено, то оно выполнено для весового порядка $\lambda + \varepsilon$ с малым $\varepsilon > 0$, так что предыдущие рассуждения достаточно провести по отношению к классу $C^\mu_{(\lambda+\varepsilon)}$.

Пусть X – подпространство в $\mathbb{R}^{m_{F_0}}$ семейств $\xi_{\tau,M}$, выделяемое условиями (3.35), (3.36), в обозначениях (3.33) его размерность равна, очевидно, $\widetilde m$. Отображение $u \to \xi$ по формуле (3.34) переводит пространство C^μ_λ гармонических на $\dot K(D)$ функций на всё X, причем $\xi = 0$ равносильно $u \in \widetilde C^\mu_\lambda$. Поэтому коразмерность подпространства $\widetilde C^\mu_\lambda$ совпадает с размерностью $\widetilde m = \dim X$.

Аналоги теорем 3.1, 3.2 справедливы и для задачи Дирихле в пространстве с весовым порядком λ, подчиненным условию (3.32).

Теорема 3.3. *В условиях (3.1), (3.32) для задачи D в пространстве $C^\mu_\lambda(K,F)$ справедливы все утверждения теоремы 3.1. Если дополнительно*

$\lambda \leqslant 1/2$ и выполнены условия теоремы 3.2, то индекс задачи задается формулой

$$\varkappa(D) = l^1(H) - l^0(H) + \sum_{\tau \in F_0} m_\tau - \sum_{\tau \in F} \chi_\tau(\lambda_\tau), \tag{3.37}$$

где $l^0(H)$ $(l^1(H))$ – число ребер $L \in \mathcal{L}(H)$, оба конца которых принадлежат (не принадлежат) F_0.

Доказательство. Положим $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^0$, это множество состоит из всех граней $M \in \mathcal{M}$, выделяемых условием $F_M \cap F_0 = \varnothing$, число элементов $\mathcal{M}^1$ обозначим m^1, так что $m = m^0 + m^1$. Обозначим через $\widetilde{D}$ оператор задачи Дирихле на пространстве $\widetilde{C}^\mu_\lambda(K, F)$; очевидно, он фредгольмово эквивалентен D, и с учетом леммы 3.3 индексы этих операторов связаны соотношением

$$\varkappa(D) = \varkappa(\widetilde{D}) + \widetilde{m}. \tag{3.38}$$

Для кусочно гармонической функции v, отвечающей $u \in \widetilde{C}^\mu_\lambda(K, F)$, соотношение (1.5) перейдет в (3.7). Если по крайней мере один из концов L принадлежит F_0, то постоянная c_L в этом соотношении равна нулю. Таким образом, роль множества $\mathcal{L}(H)$ играет здесь его подмножество $\mathcal{L}^1(H)$ всех ребер $L \in \mathcal{L}(H)$, концы которых не принадлежат F_0. В соответствии с этим аналогично доказательству теоремы 3.1 задачу $\widetilde{D}$ редуцируем к задаче $\widetilde{R}$ для кусочно аналитических функций $\phi = u + iv \in C^\mu_\lambda$, краевое условие которой получается из (3.12) заменой $\mathcal{L}(H)$ на $\mathcal{L}^1(H)$. Поскольку кусочно постоянные функции должны обращаться в нуль на гранях $M \in \mathcal{M}^0$, аналогом (3.13) здесь будет соотношение

$$\dim(\ker \widetilde{D}) = \dim(\ker \widetilde{R}) - m^1. \tag{3.39}$$

Соответственно, аналогом (3.34) будет соотношение

$$\operatorname{coker} \widetilde{D} = \{(h_i,\ L^i \in \mathcal{L}(D)),\ h \in \operatorname{coker} \widetilde{R}\}.$$

Как уже было отмечено, предложения 3.1, 3.2 справедливы для любого весового порядка, поэтому операторы R, $\widetilde{R}$ фредгольмовы и их индексы связаны соотношением

$$\varkappa(\widetilde{R}) = \varkappa(R) + l^1(H) = l^1(H) + m - \sum_{\tau \in F} \chi_\tau(\lambda_\tau).$$

Объединяя его с (3.21) и (3.33), (3.38), (3.39), как и при доказательстве теоремы 3.1, приходим к фредгольмовости оператора D и выражению $\varkappa(D) = \varkappa + s$ для его индекса, где $\varkappa$ определяется правой частью (3.37) и выполнено

$$s = \dim(\operatorname{coker} \widetilde{R}) - \dim(\operatorname{coker} \widetilde{D}) \geqslant 0. \tag{3.40}$$

Остальные утверждения теоремы 3.1 доказываются аналогично.

Пусть теперь $\lambda \leqslant 1/2$ и комплекс K удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Тогда достаточно убедиться в том, что $s = 0$ в формуле (3.40). Этот факт доказывается аналогично теореме 3.2, необходимо только учесть, что в рассматриваемом случае согласно (3.32) и принятому предположению имеем неравенство $-\lambda - 1 + \varepsilon > -3/2$, так что к первообразной Ψ функции $\psi \in C^\mu_{-\lambda-1+0}$ по-прежнему применима лемма 3.1.

Отметим, что с небольшой поправкой в индексе теорема 3.3 сохраняет свою силу и в пространствах $C^\mu_{(\lambda)}$. Очевидно, пространство $C^\mu_{(\lambda)}(K,F)$ является расширением C^μ_λ на n_0 измерений, где n_0 – число элементов F_0. Точно так же пространство $C^\mu_{(\lambda)}(K^1(D),F(D))$ является расширением C^μ_λ на $n_0(D)$ измерений, где $n_0(D)$ – число элементов $F_0\cap F(D)$. Поэтому задачи Дирихле в соответствующих пространствах фредгольмово эквивалентны и их индексы $\varkappa_\lambda$ и $\varkappa_{(\lambda)}$ связаны соотношением

$$\varkappa_{(\lambda)}=\varkappa_\lambda+n_0(H), \tag{3.41}$$

где $n_0(H)$ – число элементов множества $F_0\cap F(H)$.

В крайнем случае, когда $F_0=F$, теорему 3.3 можно существенно дополнить.

Теорема 3.4. *Пусть $0<\lambda<1$ и выполнено условие (3.1). Тогда задача Дирихле фредгольмова в пространстве $C^\mu_{(\lambda)}(K,F)$, причем любое ее решение с правой частью $f\in C^{1,\mu}_{(\lambda)}(K^1(D),F(D))$ принадлежит $C^{1,\mu}_{(\lambda)}(K,F)$. Пространство решений однородной задачи состоит из кусочно постоянных функций, обращающихся в нуль на гранях $M\in\mathcal{M}(D)$, так что его размерность равна $m(H)$. Если дополнительно $\lambda\leqslant 1/2$ и выполнены условия теоремы 3.2, то индекс задачи задается формулой*

$$\varkappa_{(\lambda)}=m_F+n(H)-l(H)-\sum_{\tau\in F}\chi_\tau(\lambda_\tau), \tag{3.42}$$

где $n(H)$ – число элементов $F(H)$.

Доказательство. Утверждение о фредгольмовости и индексе является следствием теоремы 3.3 и соотношения (3.41). Утверждение о гладкости сводится к аналогичному утверждению теоремы 3.3 в пространстве $C^{1,\mu}_\lambda$. В самом деле, пусть задано решение $u\in C^\mu_{(\lambda)}(K,F)$ задачи Дирихле с правой частью $f\in C^{1,\mu}_{(\lambda)}(K^1(D),F(D))$. Тогда достаточно выбрать гармоническую функцию $u^1\in C^{1,\mu}_{(\lambda)}(K,F)$, которая в вершинах комплекса принимает те же значения, что и u, и к разности $u^1-u\in C^\mu(K,F)$ применить теорему 3.3. Поэтому остается рассмотреть утверждение теоремы о ядре $\ker D$.

Пусть $u\in C^\mu_{(\lambda)}(K)$ является решением однородной задачи D. Тогда в силу установленного утверждения теоремы о гладкости градиент u' принадлежит $C^\mu_{\lambda-1}(\widehat{K},F)$ и, в частности, интегрируем с квадратом на каждой грани M. Поэтому к гармонической функции u_M можно применить формулу Грина, согласно которой

$$\int_M|u'_M|^2(x)\,d_2x+\int_{\partial M}u_M(y)\frac{\partial u_M}{\partial\nu_M}(y)\,d_1y=0,\qquad M\in\mathcal{M}, \tag{3.43}$$

где d_2x и d_1y означают соответственно элементы площади и длины. Суммируя равенства (**??**) по $M\in\mathcal{M}$, в соответствии с однородными краевыми условиями (1.2), (1.4) получим

$$\sum_M\int_M|u'_M|^2(x)\,d_2x+\sum_{L\in\mathcal{L}}\ \sum_{M\in\mathcal{M}_L}\int_L u(y)\frac{\partial u_M}{\partial\nu_M}\,d_1y=0.$$

Для $L \in \mathcal{L}(H)$ внутренняя сумма здесь обращается в нуль в силу (1.3), а для $L \in \mathcal{L}(D)$ эта сумма состоит из одного слагаемого и обращается в нуль в силу однородного условия (1.4), так что $u' = 0$.

Формула индекса (3.42) в рассматриваемом случае $F_0 = F$ является следствием (3.38), (3.41).

Проиллюстрируем теоремы 3.2, 3.4 на примере комплексов K_j, $1 \leqslant j \leqslant 6$, изображенных на рис. 1. Эти комплексы удовлетворяют условиям теоремы 3.2, так что можно выписать соответствующие формулы индекса задачи Дирихле. Выберем $\delta > 0$ столь малым, что

$$\det W_\tau(\zeta) \neq 0 \qquad \text{при} \quad 0 < |\operatorname{Re}\zeta| \leqslant \delta, \quad \tau \in F. \tag{3.44}$$

Пусть $\varkappa_{-0}$ и $\varkappa_{(+0)}$ означают индексы задачи в пространствах соответственно $C^\mu_{-\delta}(K,F)$ и $C^\mu_{(+\delta)}(K,F)$. Согласно (3.44) и определению (2.6), (2.7) имеем равенства $\chi_\tau(\pm\delta) = \chi_\tau(\pm 0)$, так что с учетом леммы 2.2 формулы (3.25), (3.42) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}\varkappa_{-0} = l(H) - \frac{m_F - s_F}{2}, \qquad s_F = \sum_{\tau\in F} s_\tau, \\ \varkappa_{(+0)} = n(H) - l(H) + \frac{m_F - s_F}{2},\end{gathered} \tag{3.45}$$

где, напомним, $l(H)$ – число элементов $\mathcal{L}(H)$ и $n(H)$ – число вершин $\tau \in F(H)$, т. е. вершин, которые служат концами только ребер $L \in \mathcal{L}(H)$.

С учетом леммы 2.3 для каждого из комплексов K_j фигурирующие в этих формулах величины легко подсчитываются:

$$\begin{array}{lllll}
K_1\colon & l(H)=3, & n(H)=1, & m_F=9, & s_F=5;\\
K_2\colon & l(H)=3, & n(H)=0, & m_F=6, & s_F=0;\\
K_3\colon & l(H)=3, & n(H)=0, & m_F=6, & s_F=0;\\
K_4\colon & l(H)=8, & n(H)=4, & m_F=20, & s_F=12;\\
K_5\colon & l(H)=4, & n(H)=0, & m_F=16, & s_F=8;\\
K_6\colon & l(H)=8, & n(H)=2, & m_F=16, & s_F=4.
\end{array}$$

Подстановка этих величин в (3.45) во всех шести случаях приводит к единому результату:

$$\varkappa_{-0} = n(H), \qquad \varkappa_{(+0)} = 0. \tag{3.46}$$

С учетом последнего утверждения теоремы 3.4 отсюда следует, что задача Дирихле в классе $C^\mu_{(\delta)}(K_j, F_j)$ однозначно разрешима. Тогда безусловно разрешима данная задача и в классе $C^\mu_{-\delta}(K_j, F_j)$. В самом деле, согласно теореме 3.1 коядро этой задачи содержится в $C^\mu_{-\delta-1+0}(K^1_j(D), F_j(D))$ и должно быть ортогонально всем функциям $f \in C^\mu_{(\delta)}(K^1_j(D), F_j(D))$, поэтому это коядро нулевое. Следовательно, первое равенство (3.46) означает, что число линейно независимых решений $u \in C^\mu_{-\delta}(K_j, F_j)$ однородной задачи Дирихле совпадает с числом точек множества $F_j(H)$. На основании леммы 3.2 эти решения в окрестности $\tau \in F_j(H)$ допускают особенности меньше любой степени, т. е. особенности логарифмического типа. В следующем параграфе это поведение будет точно описано.

§ 4. Асимптотика решений задачи

Изучим поведение решения u задачи Дирихле в окрестности фиксированной вершины τ комплекса K. Как и в § 1, выберем $\rho > 0$ столь малым, что все вершины комплекса, отличные от τ, лежат вне шара $B_\tau = \{|x-\tau| \leqslant \rho\}$. Тогда множество $K_\tau = K \cap B_\tau$ составлено из круговых секторов $M \cap B_\tau$, $M \in \mathcal{M}_\tau$.

Пусть в дополнение к (3.1) для рассматриваемой точки $\tau \in F$ выполняется условие

$$\det W_\tau(\zeta) \neq 0, \qquad \lambda_\tau \leqslant \operatorname{Re}\zeta < 0,$$

которое, очевидно, при достаточно малом $|\lambda_\tau|$ всегда выполнено. Рассмотрим решение u задачи Дирихле в секторах $M \cap B_\tau$, $M \in \mathcal{M}_\tau$. В силу принятого предположения о концевом символе из леммы 3.2 следует, что любое решение $u \in C^\mu_\lambda(K,F)$ задачи Дирихле, правая часть f которой дополнительно принадлежит $C^\mu_{-0}[K^1(D) \cap B_\tau, \tau]$, обладает этим же свойством, т. е. $u \in C^\mu_{-0}(M \cap B_\tau, \tau)$.

Классу $C^\mu_{-0}(M \cap B_\tau, \tau)$ принадлежат, например, функции со степенно-логарифмической асимптотикой в точке τ. Простейшими из них служат гармоническая функция $u(x) = \ln|x-\tau|$, $x \in M \cap B_\tau$, и сопряженная с ней функция $v(x)$, которую обозначим $v(x) = \arg(x-\tau)$. По отношению к декартовой системе координат $z = x + iy$ на грани M функция $\ln|x-\tau| + i\arg(x-\tau)$ будет аналитической по переменной z, ее также удобно обозначать $\ln(x-\tau)$. Классу $C^\mu_{-0}(M \cap B_\tau, \tau)$ принадлежит и функция

$$u(x) = \operatorname{Re}[p_M(\ln(x-\tau))] + u_0(x), \qquad u_0 \in C^\mu_{+0}(M \cap B_\tau, \tau), \tag{4.1}$$

определяемая некоторым многочленом $p = p_M$ комплексной переменной. В этом случае говорим, что u имеет степенно-логарифмическую асимптотику в точке τ. Степень многочлена p удобно обозначать $\deg p$, полагая $\deg p = 0$ при $p = \mathrm{const}$ и $\deg p = -1$ при $p = 0$.

Возникает вопрос: при каких условиях решение u задачи Дирихле допускает степенно-логарифмическую асимптотику в точке τ, если этим свойством обладает ее правая часть f на ребрах $L \in \mathcal{L}_\tau$? В силу сказанного выше без ограничения общности этот вопрос достаточно рассмотреть для решений $u \in C^\mu_{-0}(K,F)$. Как будет показано ниже, ответ на этот вопрос существенно зависит от порядка полюса матрицы-функции $W_\tau^{-1}(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$, этот порядок обозначим r_τ, полагая $r_\tau = 0$ при $\det W_\tau(0) \neq 0$.

Теорема 4.1. *Пусть в фиксированной точке τ выполнено условие*

$$\det W_\tau(\zeta) \neq 0, \qquad \operatorname{Re}\zeta = 0, \quad \zeta \neq 0. \tag{4.2}$$

Пусть $u \in C^\mu_{-0}(K,F)$ является решением задачи Дирихле, правая часть f которой на отрезках $L \cap B_\tau$, $L \in \mathcal{L}_\tau \cap \mathcal{L}(D)$, представима в виде

$$f(y) = \operatorname{Re}[p_L(\ln|y-\tau|)] + f_0(y), \qquad f_0 \in C^\mu_{+0}(L \cap B_\tau, \tau), \tag{4.3}$$

с некоторыми многочленами p_L. *Тогда функция* u *в секторах* $M \cap B_\tau$, $M \in \mathcal{M}_\tau$, *представима в виде* (4.1) *с некоторыми многочленами* p_M, *степени которых подчиняются оценке*

$$\deg p_M \leqslant r_\tau + \max(0, s), \qquad s = \max_{L \in \mathcal{L}_\tau \cap \mathcal{L}(D)} \deg p_L. \tag{4.4}$$

Доказательство. Следуя обозначениям доказательства теоремы 3.1, для функций $\phi_M = u_M + iv_M$, $M \in \mathcal{M}$, имеем краевую задачу (3.10) с правой частью $g = \widetilde{f} + c$, где m_F-вектор c составлен из постоянных c_L, отвечающих $L \in \mathcal{L}(H)$, и нулей.

Согласно § 2 боковыми сторонами сектора $M \cap B_\tau$, $M \in \mathcal{M}_\tau$, служат два отрезка $L_k \cap B_\tau$ с номерами $k \in P_{\tau,M}$. В декартовых координатах на гранях M этим секторам отвечают m_τ секторов S_k, $k \in E_\tau$, с вершинами τ_k.

Исходя из m_F-вектор-функции $g(t)$, $0 < t < 1$, аналогично (2.27) составим $2m_F$-вектор-функцию $\tilde{g}(t)$, $0 < t \leqslant \rho$, полагая

$$\tilde{g}_k(t) = \begin{cases} g_i(t), & k = \beta(i,0), \\ g_i(1-t), & k = \beta(i,1). \end{cases} \tag{4.5}$$

В явном виде для номеров k с $L_k \in \mathcal{L}(D)$ функция $\tilde{g}_k(t)$ имеет вид

$$\tilde{g}_k(t) = \begin{cases} f[\gamma^i(t)], & k = \beta(i,0), \\ f[\gamma^i(1-t)], & k = \beta(i,1), \end{cases}$$

а при остальных значениях k функция $\tilde{g}_k$ постоянна и принимает значение, равное одной из постоянных c_L или нулю. Напомним, параметризация γ удовлетворяет условию $|\gamma^i(t) - \gamma^i(0)| = |\gamma^i(1-t) - \gamma^i(1)| = t$ в окрестности $t = 0$. Без ограничения общности можно считать, что оно выполнено для $0 \leqslant t \leqslant \rho$. Отсюда заключаем, что для функции $\tilde{g}_k(t)$, $k \in E_\tau$, представление (4.3) переходит в представление

$$\tilde{g}_k(t) = \mathrm{Re}[p_k(\ln t)] + \varphi_k(t), \qquad \varphi_k \in C^\mu_{+0}([0,\rho], 0), \tag{4.6}$$

где $p_k = p_L$ для $k = \beta(i,0), \beta(i,1)$, если $L_k \in \mathcal{L}(D)$, и многочлен p_k постоянен для остальных номеров k. В частности, в обозначениях (4.4)

$$\max\{\deg p_k,\ k \in E_\tau\} = \max\{0, s\}. \tag{4.7}$$

Применим теперь к семейству $\phi = (\phi_M,\, M \in \mathcal{M}_\tau)$ общий результат [11] об асимптотике. Он заключается в том, что в предположении (4.2) и (4.5), (4.6) любое решение $\phi \in C^\mu_{-0}(\overline{D}, F)$ задачи (3.12) в секторах $S_k \subseteq D_M$ представимо в виде

$$\phi_M(z) = q_k(z - \tau) + \phi^0_k(z), \qquad \phi^0_k \in C^\mu_{+0}(S_k, \tau_k),$$

с некоторыми многочленами q_k степени

$$\deg q_k \leqslant r_\tau + \max_{k \in E_\tau}\{\deg p_k\}.$$

С учетом (4.7) эта оценка совпадает с (4.4). Переходя в этом представлении к вещественной части, получим представление (4.1), что завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 4.1 следует, что при $f = 0$ в окрестности каждой точки $\tau \in F$ имеем представление (4.1) с оценкой

$$\max_{M\in\mathcal{M}_\tau} \deg p_M \leqslant r_\tau \tag{4.8}$$

для степеней многочленов p_M. Этот факт позволяет оценить размерность пространства решений однородной задачи Дирихле в классе C^μ_{-0}.

Лемма 4.1. *В предположении (4.2) размерность пространства X решений однородной задачи Дирихле в классе C^μ_{-0} допускает оценку*

$$\dim X \leqslant m(H) + 2\sum_{\tau\in F} r_\tau m_\tau. \tag{4.9}$$

Доказательство. В соответствии с (4.8) на каждой грани $M \in \mathcal{M}_\tau$ разложение (4.1) можно записать в форме

$$u(x) = c_{0,M} + \sum_{k=1}^{r_\tau} \operatorname{Re}[c_{k,M} \ln^k(x-\tau)] + u_{0,M}, \qquad u_{0,M} \in C^\mu_{+0}(M\cap B_\tau, \tau),$$

с некоторыми коэффициентами $c_{0,M} \in \mathbb{R}$ и $c_{k,M} \in \mathbb{C}$, $k \geqslant 1$. Эти коэффициенты определяются по $u \in X$ однозначно, в результате получаем линейное отображение

$$X \to \prod_{\tau\in F} \mathbb{C}^{m_\tau r_\tau},$$

ядро X_0 которого содержится в $C^\mu_{(+0)}$. Согласно теореме 3.4 имеем $\dim X_0 = m(H)$, что и приводит к неравенству (4.9).

Для $\tau \in F(H)$ функция f в окрестности τ отсутствует и оценка (4.4) теоремы 4.1 переходит в (4.8). Эту оценку, вообще говоря, нельзя улучшить. Например, пусть комплекс K состоит из одной грани, $\tau \in F(H)$ и все ее стороны, не содержащие τ, принадлежат $\mathcal{L}(D)$. Матрица W_τ определяется равенством (2.16), где в соответствии с (2.15) следует положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$. Поэтому условие (4.2) выполнено и $r_\tau = 1$. С другой стороны, функция $u(x) = \ln|x-\tau|$ гармонична на $\dot K(D)$, и для нее (4.8) переходит в точное равенство.

Если $\tau \in F(D)$, то оценку (4.4) для степеней многочленов p_M можно несколько улучшить. Начнем со следующего вспомогательного предложения.

Лемма 4.2. *Пусть заданы неприводимые разбиения $P = (P_j,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$, $Q = (Q_s,\ 1 \leqslant s \leqslant n)$ множества $\{1,\dots,2m\}$, т.е. никакое собственное подмножество $G \subseteq \{1,\dots,2m\}$ нельзя представить в виде объединения целых элементов как разбиения P, так и разбиения Q. Пусть каждое P_j состоит из двух номеров k, k', которые принадлежат различным элементам разбиения Q, и задана последовательность $\sigma_k = \pm1$, $1 \leqslant k \leqslant 2m$, которая принимает на каждой паре P_j значения разных знаков. Тогда оператор $\Lambda\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-1}$, действующий по формуле*

$$(\Lambda\xi)_s = \sum_{k\in Q_s} \sigma_k \tilde\xi_k, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n-1, \tag{4.10}$$

где $\tilde\xi \in \mathbb{R}^{2m}$ определяется по ξ условием $\tilde\xi_k = \tilde\xi_{k'} = \xi_j$ для $\{k,k'\} = P_j$, переводит $\mathbb{R}^m$ на все $\mathbb{R}^{n-1}$.

Доказательство. Предположим противное; тогда существует такой ненулевой вектор $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_{n-1})$, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$\sum_{s=1}^{n-1} (\Lambda\xi)_s \eta_s = 0.$$

Доопределим η нулем до вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$, полагая $\eta_n = 0$, и введем отображение $\alpha\colon \{1,\dots,2m\} \to \{1,\dots,n\}$ по формуле $k \in Q_{\alpha(k)}$. Другими словами, функция α на элементе Q_i принимает постоянное значение i. Из этого определения следует, что

$$0 = \sum_{s=1}^{n} \eta_s \sum_{k\in Q_s} \sigma_k \tilde\xi_k = \sum_{k=1}^{2m} \sigma_k \tilde\xi_k \eta_{\alpha(k)}$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^m$. В силу предположений леммы эту сумму можем переписать в форме

$$\sum_{j=1}^{m} \pm\xi_j(\eta_{\alpha(k)} - \eta_{\alpha(k')}) = 0, \qquad P_j = \{k,k'\},$$

откуда

$$\eta_{\alpha(k)} = \eta_{\alpha(k')} \qquad \text{при} \quad \{k,k'\} = P_j. \tag{4.11}$$

По определению α функция $k \to \eta_{\alpha(k)}$ постоянна на элементах разбиения Q. В силу (4.11) она обладает аналогичным свойством и по отношению к разбиению P. Поскольку разбиения P и Q неприводимы, это возможно, только когда эта функция постоянна. Однако для $k \in G_n$ имеем $\eta_{\alpha(k)} = \eta_n = 0$, следовательно, $\eta = 0$, что невозможно по определению η.

Теорема 4.2. *Пусть множество $K_\tau \setminus \tau$ связно. Тогда в условиях теоремы 4.1 оценку (4.4) можно заменить на*

$$\deg p_M \leqslant r_\tau + \max_{L\in\mathcal{L}_\tau\cap\mathcal{L}(D)} \deg p_L. \tag{4.12}$$

В частности, если $r_\tau \leqslant 1$ и $f \in C^\mu_{+0}(K^1(D)\cap B_\tau,\tau)$, то и принадлежит классу $C^\mu_{+0}(K_\tau,\tau)$.

Доказательство. Как было отмечено при доказательстве теоремы 4.1, для функций $\phi_M = u_M + iv_M$, $M \in \mathcal{M}$, имеем краевую задачу (3.12) с правой частью $g = \widetilde{f}$. Каждая функция v_M определена с точностью до аддитивной постоянной ξ_M, которая сказывается на коэффициентах c_L, $L \in \mathcal{L}(H)$, в (3.12). Поэтому достаточно доказать, что выбор этих постоянных можно подчинить условию $c_L = 0$ для $L \in \mathcal{L}_\tau\cap\mathcal{L}(H)$. Тогда в правой части (4.7) максимум можно брать только по $\deg p_L$, что приводит к оценке (4.12).

Рассмотрим разбиения $P_\tau = (P_{\tau,M})$ и $Q_\tau = (Q_{\tau,L})$ множества $\{1,\dots,2m_\tau\}$, введенные в § 2. Поскольку по предположению множество $K_\tau \setminus \tau$ связно, эти разбиения неприводимы и, следовательно, удовлетворяют условиям леммы 4.2

с $m = m_\tau$. То, что элементы пары $P_{\tau,M}$ не могут принадлежать одному элементу разбиения Q_τ, очевидно: эти элементы есть номера двух сторон грани M с общим концом τ, и обе эти стороны не могут совпадать с ребром комплекса, который определяет элемент разбиения Q_τ.

Исходя из семейства функций $u_M = u|_M$, $M \in \mathcal{M}$, определение (3.3) граничных значений можно распространить на стороны L_k, $k \in P_{\tau,M}$, по формуле

$$u^+_{\tau,k} = u_M|_{L_k}. \tag{4.13}$$

Аналогичным образом распространим и сигнатуру ориентации σ, полагая, $\sigma_{\tau,k} = 1$, если движение по L_k с началом в τ совпадает с обходом контура ∂M в заданном направлении, и $\sigma_{\tau,k} = -1$ в противном случае. Ясно, что $\sigma_{\tau,k}$ на номерах k пары $P_{\tau,M}$ принимает значения разных знаков и, следовательно, удовлетворяет условию леммы 4.2.

В принятых обозначениях соотношение (3.7) применительно к $L \in \mathcal{L}_\tau \setminus \mathcal{L}(D)$ переходит в соотношение

$$\sum_{k \in Q_{\tau,L}} \sigma_{\tau,k} v^+_{\tau,k} = c_L. \tag{4.14}$$

Поэтому на основании леммы 4.2 существует такое семейство $\xi = (\xi_M,\ M \in \mathcal{M}_\tau)$, что

$$\sum_{k \in Q_{\tau,L}} \sigma_{\tau,k} \tilde{\xi}_k = c_L, \qquad L \in \mathcal{L}_\tau \setminus \mathcal{L}(D),$$

где вектор $\widetilde{\xi} \in \mathbb{R}^{2m_\tau}$ определяется по условию $\widetilde{\xi}_k = -\widetilde{\xi}_{k'} = \xi_M$ для $\{k, k'\} = P_{\tau,M}$. Пусть функция ξ постоянна на гранях M комплекса, ее сужение на $M \in \mathcal{M}_\tau$ совпадает с ξ_M. Тогда в обозначениях (4.13) граничное значение $\xi_{\tau,k}$ этой функции совпадает с $\tilde{\xi}_k$ и с учетом (4.14) имеем

$$\sum_{k \in Q_{\tau,L}} \sigma_{\tau,k} (v - \chi)^+_{\tau,k} = 0,$$

что и требовалось доказать. Тем самым первая часть теоремы установлена.

Рассмотрим, далее, решение $u \in C^\mu_{-0}(K, F)$ задачи Дирихле, правая часть f которой принадлежит классу $C^\mu_{+0}[K^1(D) \cap B_\tau, \tau]$. Если $r_\tau \leqslant 1$, то правая часть (4.12) не превосходит нуля, так что для каждого $M \in \mathcal{M}_\tau$ найдется такая постоянная c_M, что $u(x) - c_M \in C^\mu_{+0}(M \cap B_\tau, \tau)$. Поскольку множество K_τ связно, эти постоянные c_M сохраняют одно и то же значение c для всех $M \in \mathcal{M}_\tau$. Так как по предположению это множество содержит один из отрезков $L \cap B_\tau$, $L \in \mathcal{L}(D)$, на котором $u(y) \to 0$ при $y \to \tau$, то $c = 0$. Следовательно, $u \in C^\mu_{+0}(K \cap M_\tau, \tau)$, и на основании леммы 1.1 отсюда имеем $u \in C^\mu_{+0}(K_\tau, \tau)$.

Случай, когда множество $K_\tau \setminus \tau$ не является связным, по существу также охватывается теоремой 4.2. В самом деле, тогда согласно § 2 матрица W_τ блочно-диагональна и ее диагональные блоки играют роль концевого символа по отношению к связным компонентам этого множества. В соответствии с этим теорему следует применять к соответствующим диагональным блокам этой матрицы.

В силу леммы 2.3 при $m_\tau \leqslant 3$ условие (4.2) всегда выполнено. Эту лемму можно дополнить полным описанием значений порядка полюса $r_\tau(0)$.

Лемма 4.3. *Пусть $m_\tau \leqslant 3$. Если множество $K_\tau \setminus \tau$ связно, то порядок полюса $r_\tau(0)$ матрицы-функции $W_\tau^{-1}(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$ совпадает с $s_\tau(0)$, за исключением случая $m_\tau = 3$ (iv) $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3)$, когда он равен 1. Если множество $K_\tau \setminus \tau$ не является связным, то $r_\tau(0)$ совпадает с максимальным порядком диагональных блоков обратной матрицы, отвечающих связным компонентам этого множества.*

Доказательство. Пусть множество $K_\tau \setminus \tau$ связно; тогда в силу очевидной оценки $\min[1, s_\tau(0)] \leqslant r_\tau(0) \leqslant s_\tau(0)$ утверждение леммы достаточно проверить для двух случаев леммы 2.3, когда $s_\tau(0) = 2$. Рассмотрим первый из них, когда в обозначениях леммы 2.3 имеем $m_\tau = 3\,$(iv) $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3)$. Введем матрицу $W_*^{(-1)} = (\det W_*) W_*^{-1}$, элементы которой составлены из алгебраических элементов матрицы W_*. Простая проверка показывает, что в рассматриваемом случае $W_*^{(-1)}(0) = 0$, так что порядок полюса матрицы-функции $W_*^{-1}(\zeta)$ равен 1. Тогда в силу (2.14) аналогичным свойством обладает и матрица W^{-1}.

Обратимся ко второму случаю $m_\tau = 3$ (v). Согласно (**??**) в этом случае $W_* = -W_0^\top$ и, как показывает простая проверка, $W_*^{(-1)}(0) \neq 0$. С учетом (2.20) формула (2.14) переходит в формулу

$$W^{-1} = \frac{1}{\det W_*} \begin{pmatrix} 0 & W_*^{(-1)} \\ -(W_*^{(-1)})^\top & 0 \end{pmatrix},$$

так что порядок полюса $r_\tau(0)$ равен 2. Последнее утверждение леммы очевидно.

Список литературы

1. Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2005, 272 с.
2. S. Nicaise, O. M. Penkin, “Poincaré–Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets”, *J. Math. Anal. Appl.*, **296**:2 (2004), 504–520.
3. O. M. Penkin, “About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions”, *Partial differential equations on multistructures* (Luminy, 1999), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **219**, Dekker, New York, 2001, 183–191.
4. O. M. Penkin, “Second-order elliptic equations on a stratified set”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **119**:6 (2004), 836–867.
5. A. A. Gavrilov, S. Nicaise, O. M. Penkin, “Poincaré's inequality on stratified sets and applications”, *Evolution equations: applications to physics, industry, life sciences and economics* (Levico Terme, 2000), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **55**, Birkhäuser, Basel, 2003, 195–213.
6. А. П. Солдатов, *Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций*, Высшая школа, М., 1991, 208 с.
7. А. П. Солдатов, “Общая краевая задача теории функций”, *Докл. АН СССР*, **299**:4 (1988), 825–828; англ. пер.: A. P. Soldatov, “A general boundary value problem of function theory”, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:2 (1988), 486–489.

8. Л. А. Ковалева, А. П. Солдатов, "Об одной нелокальной задаче теории функций", *Дифференц. уравнения*, **46**:3 (2010), 396–409; англ. пер.: L. A. Kovaleva, A. P. Soldatov, "On a nonlocal problem in function theory", *Differ. Equ.*, **46**:3 (2010), 400–414.
9. А. П. Солдатов, "Нелокальная краевая задача Римана теории функций", *Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика*, 2011, № 5(100), вып. 22, 122–132.
10. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, 3-е изд., испр. и доп., Наука, М., 1968, 511 с.; англ. пер. 2-го изд.: N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*, P. Noordhoff N. V., Groningen, 1953, vi+447 pp.
11. А. П. Солдатов, *Краевые задачи теории функций в областях с кусочно гладкой границей*, Ч. II, Изд-во ТГУ, Ин-т прикл. матем. им. И. Н. Векуа, Тбилиси, 1991, 276 с.
12. Р. Пале, *Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе*, Мир, М., 1970, 359 с.; пер. с англ.: R. S. Palais, *Seminar on the Atiyah–Singer index theorem*, With contributions by M. F. Atiyah, A. Borel, E. E. Floyd, R. T. Seeley, W. Shih, R. Solovay, Ann. of Math. Stud., **57**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965, x+366 pp.

Лидия Александровна Ковалева
(Lidiya A. Kovaleva)
Национальный исследовательский университет
"Белгородский государственный университет"
E-mail: kovaleva_-l@bsu.edu.ru

Поступило в редакцию
14.02.2014
24.03.2014

Александр Павлович Солдатов
(Alexandr P. Soldatov)
Национальный исследовательский университет
"Белгородский государственный университет"
E-mail: soldatov48@gmail.com