имеет единственный корень. Это соглашение обусловлено чисто методическими соображениями, цель которых – упростить и изложение теории в школе, и сами задачи.

Таким образом, школьникам, которые намерены продолжить изучение математики в вузе, мы рекомендуем преподавать теорию многочленов классическим способом, используя термин «множество корней многочлена» не в теоретико-множественном смысле. Однако необходимо настойчиво обращать внимание учащихся на тот факт, что многие школьные задачи формулируются без учета кратности корней многочлена или решений алгебраического уравнения.

Список литературы

1. Блудова И. В., Белянова Э. Н. О «ножницах» между школьной и вузовской математикой в преподавании теории многочленов // Евразийский союз ученых. – 2014. – № 9. С. 26-28.
2. Болтянский В.Г. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1985. – 325 с.
3. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1986. – 754 с.
4. Табачников С.Л. Многочлены. – М.: ФЗИС, 2004. – 200 с.
5. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по математике с решениями. 10 класс. – М.: Астрель, 2001. – 446 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИСТЕННОГО ЭФФЕКТА В СЛУЧАЙНЫХ УПАКОВКАХ СИСТЕМ ЧАСТИЦ

Бондарев В.Г.
доцент кафедры информационных систем управления НИУ «БелГУ»,
канд. техн. наук, доцент,
Россия, г. Белгород

В статье проводится математическое моделирование влияние пристенного эффекта на плотность случайной упаковки системы жестких сфер. Полученные зависимости плотности упаковки от толщины пристенного слоя частиц сравниваются с аналогичными характеристиками для регулярных шаровых упаковок.

Ключевые слова: моделирование, случайная упаковка, плотность упаковки.

При размещении сфер в виде плотноупакованной случайной системы в некотором ограниченном пространстве плотность их упаковки снижается, вследствие возникновения областей упорядочивания сфер вблизи границ рассматриваемой системы, а также происходит возникновение дополнительных пустот по причине исключения из рассмотрения сфер, которые могли бы частично разместиться внутри рассматриваемого объема. Ограничение области формирования случайной упаковки системы частиц вызывает явление так называемого пристенного эффекта [1].

Причина изменения плотности упаковки частиц в пристенном слое носит двоякий характер. С одной стороны стенки области установки частиц препятствуют плотной укладке частиц, вследствие отсутствия у них дополнительных степеней свободы, а с другой – вызывают упорядочивание частиц системы [2]. Влияние расстояния между стенками области установки полностью определяется соотношением размера области установки частиц и размера частиц системы. Так, считается, что при соотношении размера области установки D и диаметра d частицы порядка четырех-пяти (D/d~4÷5) пристенный эффект оказывает существенное влияние на структуру системы частиц [3]. Основываясь на представленных данных, было решено посвятить эту работу разработке математической модели случайной упаковки, ограниченной с одной стороны границей, а также оценки влияния пристенного эффекта на плотность упаковки системы частиц.

Пусть у нас имеется совокупность N идентичных сфер диаметром d, представленных в виде плотноупакованной случайной системы в некотором ограниченном пространстве объемом V с линейным размером D. Пусть также у нас имеется некоторая граничная зона, вблизи стенок области установки частиц, с линейным размером L. Необходимо найти зависимость плотности упаковки η от параметров, связанных с наличием границ области установки сфер.

Разобьем всю плотноупакованную случайную систему сфер на две части (рис.1). Первая часть, занимающая объем V_{10}, будет представлять собой систему сфер, имеющую плотность упаковки η_1, соответствующую случаю неограниченного пространства

$$\eta_1 = \frac{N_1 v}{V_{10}}, \qquad (1)$$

где N_1 – число сфер в области объемом V_{10}; v – объем отдельной сферы.

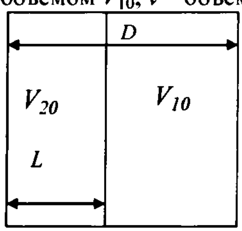

Рис. 1. Схема структуры плотноупакованной случайной системы частиц

Вторая часть системы будет содержать только граничные сферы, которые полностью размещены внутри рассматриваемого объема плотноупакованной случайной системы. Данная система будет занимать объем V_{20} и иметь плотность упаковки

$$\eta_2 = \frac{N_2 v}{V_{20}}, \qquad (2)$$

где N_2 – число сфер, расположенных в пристенной области.

Найдем вначале выражение для определения числа сфер N_1 в области объемом V_{10}. Для этого будем считать, что число таких сфер должно полностью определяться через размерные параметры области установки частиц

$$N_1 = \frac{\eta_1}{v} k_f (D-L)^3 \,, \tag{3}$$

где k_f – объемный коэффициент формы. Так, в случае сферической формы области установки сфер: $k_f = \pi/6$, при кубической форме: $k_f = 1$, а при цилиндрической форме с одинаковыми линейными размерами: $k_f = \pi/4$.

Аналогичным образом определим и число сфер N_2

$$N_2 = \frac{\eta_2}{v} k_f [D^3 - (D-L)^3], \tag{4}$$

Плотность упаковки η рассматриваемой системы частиц определим согласно формуле

$$\eta = \frac{N_1 v + N_2 v}{V}. \tag{5}$$

Подставляя соответствующие выражения для параметров, входящих в уравнение (5) из формул (3) и (4), и произведя необходимые преобразования, получим

$$\eta = \eta_1 (1 - \frac{L}{D})^3 + \eta_2 [1 - (1 - \frac{L}{D})^3]. \tag{6}$$

Полученное выражение (6) показывает, что объемный коэффициент формы k_f оказался не включенным в окончательную формулу и, следовательно, форма области установки частиц не оказывает влияния на плотность случайной упаковки системы сфер. Кроме того, при значениях L сопоставимых со значениями области установки D ($D \sim L$) плотность случайной упаковки η системы сфер практически полностью определяется плотностью упаковки η_2, а при значениях области установки D много больше значений L ($D >> L$) плотность упаковки η определяется значениями плотности упаковки η_1 самой системы сфер.

Основываясь на полученных закономерностях можно сделать вывод о размере пристенной области. Для этого, мы воспользуемся известным эмпирическим выражением [4]

$$\eta = 0{,}64 - 0{,}33/\sqrt[3]{N} \,, \tag{7}$$

где N – общее число сфер, находящихся в пределах области установки частиц.

Определив общее число сфер N как сумму всех сфер в областях V_{10} и V_{20} с помощью формул (3) и (4), а также выразив ширину пристенной зоны через диаметр d отдельной сферы в виде: $L = nd$ (n – количество сфер на отрезке L), можно оценить и ширину пристенной области, которая в этом случае составляет величину порядка $2{,}75d$, что достаточно близко к результатам, полученным с помощью компьютерного моделирования ($L = 1{,}5d - 2{,}5d$) [5].

Список литературы

1. Mueller, G.E. Radial porosity in packed beds of spheres / G.E. Mueller // Powder Technology. – 2010, №203. – P. 626-633.

2. Roozbahani, M.M. Effect of rectangular container's sides on porosity for equal-sized sphere packing / M.M. Roozbahani, B.B.K. Huat, A. Asadi // Powder Technology. – 2012, №224. – P. 46-50.

3. Wensrich, C.M. Boundary structure in dense random packing of monosize spherical particles / C. M. Wensrich // Powder Technology. – 2012, №219. – P. 118-127.

4. Scott, G.D. Packing of equal spheres / G.D. Scott // Nature. – 1960. – Vol.188, № 4754. – P. 908-909.

5. Бондарев, В.Г. Случайная 3D-упаковка и пристенный эффект [Текст] / В.Г. Бондарев, Л.В. Мигаль, Т.П. Бондарева // Теоретические и прикладные аспекты современной науки: сб. научных трудов по материалам международной научно-практической конференции, 31 мая 2015 г. – Белгород. – 2015.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СЛУЧАЙНОЙ УПАКОВКИ

Бондарев В.Г.

доцент кафедры информационных систем управления НИУ «БелГУ»,
канд. техн. наук, доцент,
Россия, г. Белгород

В статье рассматривается общий подход к определению предельной плотности упаковки систем частиц со стороны статистического описания случайного размещения геометрических элементов регулярных упаковок как в двух-, так и трехмерном пространствах.

Ключевые слова: моделирование, случайная упаковка, плотность упаковки.

Случайная упаковка представляет собой сложную структурно-неоднородную систему, состоящую из совокупности частиц, находящихся в контактном взаимодействии [1]. Одной из наиболее актуальных проблем, стоящих в теории плотноупакованных систем, является оценка предельных значений плотностей упаковки частиц, расположенных случайным образом, в пространствах различной размерности.

Наиболее значимые результаты по определению предельной плотности случайных упаковок были получены экспериментально, либо путем компьютерного моделирования. Наиболее достоверные сведения для двумерного случая можно найти в работе Дж. Берримана [2], в которой плотность упаковки определена с точностью до третьего знака: 0,817±0,003 и в работе П. Меакин и Р. Джулиен [3], определивших плотность упаковки с точностью до четвертого знака: 0,8180±0,0001. В трехмерном случае можно выделить работу того же Дж. Берримана [2], получившего значение: 0,64±0,02. Другой подход, предложенный П. Джалали и М. Ли [4], и основанный на геометрическом анализе возможных локальных конфигураций твердых сфер, дает оценку для предельной плотности случайной упаковки равную: 0,6394.

Решение поставленной задачи в данной работе основывается на подходе построения случайной упаковки систем сферических частиц, в предположении, что структуру упаковки можно приближенно описать как совокупность структурных элементов регулярных упаковок, базовые конфигурации