Д.т.н., проф. Е.Г. Жиляков, к.т.н., доц. А.А. Черноморец, Н.С. Титова (Белгородский госуниверситет)

E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets, N.S. Titova

СУБПОЛОСНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК ПРОИЗВОДНЫХ СИГНАЛОВ

SUB-BAND METHOD FOR ESTIMATION OF DERIVATIVE OF SIGNAL

Разработан метод вычисления по дискретным значениям сигналов оценок производных их компонент, которые обусловлены частями энергий, попадающими в заданные частотные интервалы Метод обобщается на случай вычисления на фоне флуктуационных шумов оценок производных сигналов, подавляющих доли энергий, которые сосредоточены в частотных интервалах ограниченных размеров

Key words signal, discrete samples, estimation of derivative, energy, frequency intervals, fluctuation noise

Проблема вычисления значений производных сигналов $u(t)$, $t\in[0,T]$ на основании зарегистрированных дискретных (по времени) отсчётов $u_k=u(t_k)$, $k=0,\ldots,N$; $t_0=0$; $t_N=T$, возникает при решении различных задач управления и принятия решений. Сложность получения оценок обусловлена некорректностью задачи, т.к. производная определяется скоростью изменений функции, которая может быть очень большой, например, вследствие воздействий флуктуационных погрешностей регистрации данных. В силу этого классические [1,2] методы вычислений приближенных значений производных оказываются малопригодными, т.к. они изначально ориентированы на класс гладких функций.

Это свойство (чувствительности к резким изменениям сигнала) производных породило достаточно большое количество методов их оценивания, в той или иной мере осуществляющих регуляризацию, позволяющую получать оценки, устойчивые к воздействиям погрешностей регистрации данных. В основе указанных подходов так или иначе используется вычислительные соотношения, определяющие оценки производных нелокально, т.е. через много отсчётов, а не только через отсчёты из ближайшей окрестности к заданному значению аргумента. В основе вывода конкретных вычислительных соотношений при этом используются различные принципы, отражающие требования устойчивости получаемых оценок.

В 3,4] показано, что в качестве класса аппроксимирующих производные функций целесообразно использовать функции с финитными областями определения трансформант Фурье. При этом отбор конкретной аппроксимации (оценки производной) осуществляется на основе вариационного принципа минимизации евклидовой нормы

$$\| f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{\omega\in\Omega} |F(\omega)|^2 \, d\omega / 2\pi = \min, \qquad (1)$$

при выполнении интерполяционных условий

$$\hat{u}(t_k) = u_0 + \int_0^{t_k} f(t)dt = u_k, k = 1,..,N. \qquad (2)$$

Здесь символ f означает оценку производной, областью определения которой служит вся числовая ось, представимую через трансформанту Фурье

$$f(t) = \int_{\omega\in\Omega} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega / 2\pi \qquad (3)$$

с финитной областью определения

$$\Omega = [-\Omega_2, -\Omega_1) \cup [\Omega_1, \Omega_2). \qquad (4)$$

Там же показано, что достаточным условием выполнения интерполяционных равенств (2) является неравенство

$$T * (\Omega_2 - \Omega_1) \geq 2\pi, \qquad (5)$$

которое является своеобразным выражением принципа неопределенности, связывающим длительность анализируемого сигнала с шириной области определения (полосы частот) трансформанты Фурье получаемой оценки производной.

Возникает проблема обоснования выбора этой полосы частот. Ясно, что он должен основываться на анализе информации, которая имеется в отсчетах исходной функции.

Рассмотрим для простоты случай эквидистантной дискретизации, которая имеет наибольшее распространение в задачах обработки сигналов. При этом выполняются условия

$$t_k = k * \Delta t, k = 0,..,N, \qquad (6)$$

так, что имеет место равенство

$$T = N * \Delta t\,. \tag{7}$$

Согласно теории дискретизации Найквиста [5] трансформанта Фурье дискретных отсчётов

$$U_d(\omega) = \sum_{k=0}^{N} u_k \exp(-jk\Delta t\omega) \tag{8}$$

является периодической с периодом $2\pi/\Delta t$ функцией частоты, причем справедливо равенство Найквиста

$$\sum_{r=1}^{R} P_r = \sum_{k=0}^{N} u_k^2\,, \tag{9}$$

где P_r - часть энергии

$$P_r = \int_{\nu\in V_r} |U_d(\nu/\Delta t)|^2\, d\nu/2\pi\,, \tag{10}$$

попадающая в соответствующий частотный интервал

$$V_r = [-V_{2r}, -V_{1r}) \cup [V_{1r}, V_{2r}), V_{2R} = \pi\,. \tag{12}$$

В дальнейшем полагаем, что частотные интервалы также имеют одинаковую ширину, равную

$$\Delta V_r = [V_{2r} - V_{1r}) = \pi / R\,. \tag{13}$$

Ясно, что всегда можно отобрать минимальное количество $R_m<R$ частотных интервалов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{r\in K_b} P_r \geq m * \sum_{k=0}^{N} u_k^2\,, \tag{14}$$

т.е. содержащих заданную долю энергии

$$m < 1\,. \tag{15}$$

При этом объединение соответствующих частотных интервалов

$$V_S = \bigcup_{r\in R_m} V_r \tag{16}$$

и определяет в общем случае составной частотный интервал

$$\Omega_S = \bigcup_{r\in R_m} \Omega_r\,, \tag{17}$$

который должен фигурировать в представлении (3). Здесь важно учесть соотношение между соответствующими переменными (границами интервалов)

$$V_{ir} = \Delta t * \Omega_{ir}, i = 1,2; \nu = \Delta t * \omega\,. \tag{18}$$

Для вычисления интегралов вида (10) следует использовать соотношения [6]

$$P_r = \vec{u}^T A_r \vec{u}, \vec{u} = (u_0,..,u_N)^T. \qquad (19)$$

Здесь символ T означает операцию транспонирования векторов, а матрица имеет элементы

$$a^r_{ik} = (\sin(V_{2r}(i-k)) - \sin(V_{1r}(i-k)))/\pi(i-k), i,k = 0,..,N. \qquad (20)$$

В статье показывается, что описанная процедура определения частотных интервалов, в которых сосредоточена заданная доля энергии, открывает новые возможности для построения устойчивых вычислений оценок производных. Это направление представляется естественным именовать субполосным, имея в виду вычисление оценок для компоненты сигнала, обусловленных его энергией в заданной частотной полосе.

В самом деле, исходный непрерывный отрезок неизвестного, кроме выборочных значений сигнала, можно представить в виде

$$u(t) = x_S(t) + y(t); t \in [0,T], \qquad (21)$$

где

$$x_S(t) = \int_{\omega \in \Omega_S} U_T(\omega) \exp(j\omega t) d\omega / 2\pi. \qquad (22)$$

Здесь подынтегральная функция является трансформантой Фурье

$$U_T(\omega) = \int_0^T u(t) \exp(-j\omega t) dt. \qquad (23)$$

Ясно, что искомая производная также представима в виде суммы

$$du(t)/dt = dx_S(t)/dt + dy(t)/dt; t \in (0,T). \qquad (24)$$

Если в определении (14) доля энергии m будет достаточно близкой к единице, то для регуляризации можно ограничиться оцениванием только производных первого из слагаемых в правой части последнего соотношения, полагая вторую компоненту обусловленной флуктуационными шумами. Таким образом, принцип регуляризации имеет вид

$$du(t)/dt \cong dx_S(t)/dt, t \in (0,T). \qquad (25)$$

Из определения (22), имея в виду представления (23) и (17), в котором объединяются непересекающиеся частотные интервалы, нетрудно получить следующее выражение для искомой компоненты

$$x_S(t) = \int_0^T A_S(t-\tau)u(\tau)d\tau\,, \qquad (26)$$

где

$$A_S(t) = \sum_{r\in R_m} A_r(t)\,; \qquad (27)$$

$$A_r(t) = \int_{\omega\in\Omega_r} \exp(j\omega t)d\omega/2\pi\,.$$

После интегрирования получаем окончательное выражение

$$A_r(t) = (\sin(\Omega_{2r}t) - \sin(\Omega_{1r}t))/\pi t\,. \qquad (28)$$

Ясно, что подстановка этого выражения в представление (10) позволяет получить следующее соотношение для производной

$$dx_S(t)/dt = \int_0^T B_S(t-\tau) * u(\tau)d\tau\,. \qquad (29)$$

Здесь

$$B_S(t) = dA_S(t)/dt = \sum_{r\in R_m} (t*(\Omega_{2r}\cos(\Omega_{2r}t) - \Omega_{1r}\cos(\Omega_{1r}t)) - \sin(\Omega_{2r}t) + \sin(\Omega_{1r}t))/\pi t^2 \qquad (30)$$

Очевидно, что при наличии только отсчётов сигнала интеграл в (29) следует заменить интегральной суммой, положив

$$dx_S(t)/dt \approx \sum_{k=0}^{N} d_k * B(t-k\Delta t) * u_k\,, \qquad (31)$$

где коэффициенты d_k, k=0,…,N, определяются видом избранной квадратурной формулы.

Таким образом, правая часть последнего соотношения позволяет вычислить оценку производной сигнала, отражающего его свойства в некотором частотном интервале.

Легко понять, что представление (26) позволяет получить вычислительные формулы и для оценок производных высших порядков.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры для инновационной России» на 2009-2013 годы, гос. контракт № 14.740.11.0390.

Литература

1. Бахвалов Н.С. и др. Численные методы. М., Бином, 2004.

2. Колесников Е.Г. Введение в численный анализ. М., РУДН, 2002.

3. Жиляков Е.Г. и Фокин Ю.А.м Вариационный метод оценивания производных эмпирических функций. – "Журнал вычислительной математики и математической физики", 2002, т. 42, № 8.

4. Жиляков Е.Г, Чудинов С.М. и Созонова Т.Н. Вариационный метод дифференцирования и интерполяции дискретных сигналов. – "Вопросы радиоэлектроники", сер. РЛТ, 2006, вып.1.

5. Рабинер Л. и Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., Мир, 1978.

6. Жиляков Е.Г., Белов С.П., Черноморец А.А. Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений. – "Вопросы радиоэлектроники", сер. ЭВТ, 2010, вып. 1, с. 10-25.

Статья поступила 12.10.2010

Д.т.н., проф. Е.Г. Жиляков, А.А. Барсук (БелГУ)

E.G. Zhilyakov, A.A. Barsuk

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ НА СПУТНИКОВЫХ ФОТОГРАФИЯХ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

PARALLEL COMPUTATIONS IN THE METHOD OF AUTOMATIC VARIATIONAL CLASSIFICATION OF OBJECTS AT THE SATELLITE EARTH SURFACE PHOTOS

Изложен подход к реализации параллельных вычислений в методе автоматической вариационной классификации объектов на спутниковых фотографиях земной поверхности, рассмотрены современные технологии разработки параллельных программ.

Key words: parallel computations, MPI, OpenMP, CUDA, object classification, image, variational principle, maximization of partitioning quantity functional, graph splitting, minimal spanning tree.

Одним из основных направлений развития информационных технологий является разработка методов и алгоритмов обработки и анализа изображений, что обусловлено тенденцией использования естественных для человека форм информационного обмена, к которым относятся визуальные отображения реальности. Среди интен-