ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2011, том 47, № 9, с. 1294–1304

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.25

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ АДАМАРА

© 2011 г. **А. В. Глушак, Т. А. Манаенкова**

В банаховом пространстве исследуется задача типа Коши с левосторонней дробной производной Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$, а также задача Коши с регуляризованной дробной производной Адамара. Устанавливается корректная разрешимость рассматриваемых задач как с ограниченным оператором, так и с генератором сильно непрерывной полугруппы. Для обратных коэффициентных задач указаны достаточные условия их однозначной разрешимости.

1. Задача типа Коши с дробной производной Адамара. Пусть X – банахово пространство, B – линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в X с областью определения $D(B)$ и непустым резольвентным множеством. При $0 < \alpha < 1$ рассмотрим задачу типа Коши

$$ {}^A D^{\alpha}_{1+} u(t) = Bu(t), \quad t > 1, \tag{1}$$

$$ \lim_{t \to 1+} {}^A I^{1-\alpha}_{1+} u(t) = u_0, \tag{2}$$

где

$$ {}^A I^{1-\alpha}_{a+} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} u(s)\, \frac{ds}{s}$$

– левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $1-\alpha$, $a > 0$ (см. [1, с. 250; 2, с. 110]), ${}^A D^{\alpha}_{a+} u(t) = t \dfrac{d}{dt} {}^A I^{1-\alpha}_{a+} u(t)$ – левосторонняя дробная производная Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $u_0 \in X$.

Примеры решения некоторых конкретных дифференциальных уравнений с дробными производными Адамара могут быть найдены в [2, с. 212; 3]. Отметим также, что доказываемые в дальнейшем результаты были анонсированы в [4].

Определение 1. Решением задачи (1), (2) называется непрерывная при $t > 1$ функция $u(t)$ такая, что ${}^A I^{1-\alpha}_{1+} u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t > 1$ функцию, $u(t)$ принимает значения в $D(B)$ и удовлетворяет задаче (1), (2).

Определение 2. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на X, коммутирующая с B операторная функция ${}^A T_{\alpha}(t)$ и числа $M > 0$, $\omega \in R$ такие, что для любого $u_0 \in D(B)$ функция ${}^A T_{\alpha}(t) u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$ \|{}^A T_{\alpha}(t)\| \le M (\ln t)^{\alpha - 1} t^{\omega}, \quad t > 1.$$

Наряду с уравнением (1) мы также будем рассматривать и неоднородное уравнение

$$ {}^A D^{\alpha}_{1+} u(t) = Bu(t) + h(t), \quad t > 1. \tag{3}$$

Замена независимой переменной t и неизвестной функции $u(t)$

$$ t = e^{\tau}, \quad \tau > 0, \quad u(t) = u(e^{\tau}) = v(\tau) \tag{4}$$

переводит задачи (1), (2) и (3), (2) в уже исследованные задачи для дифференциальных уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля $D^{\alpha}_{0+}v(\tau) = \dfrac{d}{d\tau} I^{1-\alpha}_{0+} v(\tau)$, где

$$I^{1-\alpha}_{0+} v(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{\tau} (\tau - s)^{-\alpha} v(s)\, ds$$

– левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$. Указанные замены переводят уравнение (1), начальное условие (2) и уравнение (3) в следующие соотношения:

$$D^{\alpha}_{0+} v(\tau) = Bv(\tau), \quad \tau > 0, \tag{5}$$

$$\lim_{\tau\to 0+} I^{1-\alpha}_{0+} v(\tau) = u_0, \tag{6}$$

$$D^{\alpha}_{0+} v(\tau) = Bv(\tau) + h(e^{\tau}), \quad \tau > 0. \tag{7}$$

Разрешимость задач (5), (6) и (7), (6) установлена в [5]. Поэтому ниже в теоремах 1–3 мы переформулируем нужные нам результаты о разрешимости задач (1), (2) и (3), (2), содержащих дробные производные Адамара.

Пусть далее $L(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ – функция Миттаг–Леффлера, определяемая соотношением

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Теорема 1. *Пусть* $B \in L(X)$, $u_0 \in X$, *функция* $h(t) \in C(1,\infty)$ *абсолютно интегрируема в окрестности точки* $t = 1$. *Тогда задача (1), (2) равномерно корректна и*

$${}^{A}T_{\alpha}(t)u_0 = (\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\ln t)^{\alpha} B)u_0,$$

а неоднородная задача (3), (2) имеет единственное решение, определяемое равенством

$$u(t) = (\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\ln t)^{\alpha} B)u_0 + \int\limits_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha} B\right) h(s)\frac{ds}{s}.$$

В дальнейшем нами будет использована неотрицательная функция

$$f_{\tau,\alpha}(t) = t^{-1} e^{1,0}_{1,\alpha}(-\tau t^{-\alpha}),$$

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\delta - \beta n)}, \quad \alpha > \max\{0;\beta\}, \quad \mu, z \in C,$$

где $e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)$ – функция типа Райта (см. [6, гл. 1]).

Условие 1. Начальный элемент u_0 принадлежит $D(B)$ и оператор B является производящим оператором экспоненциально ограниченной полугруппы $T(t)$ класса C_0, причем $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 1. Тогда однородная задача (1), (2) равномерно корректна и при этом*

$${}^{A}T_{\alpha}(t)u_0 = \int\limits_0^{\infty} f_{\tau,\alpha}(\ln t) T(\tau) u_0\, d\tau, \tag{8}$$

$$\|{}^{A}T_{\alpha}(t)\| \le M(\ln t)^{\alpha-1} t^{\omega_1}, \quad \omega_1 > \omega^{1/\alpha}. \tag{9}$$

Условие 2. Выполнено одно из следующих требований: a) функция $h(t) \in C(1,\infty)$ абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$ и принимает значения в $D(B)$, функция $Bh(t) \in C(1,\infty)$ также абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$; b) функция ${}^AI^{1-\alpha}_{1+}h(t)$ непрерывна при $t \geq 1$, непрерывно дифференцируема при $t > 1$ и ${}^AD^{\alpha}h(t)$ абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$.

Теорема 3. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна,* $u_0 \in D(B)$ *и выполнено условие 2. Тогда задача (3), (2) имеет единственное решение, определяемое равенством*

$$u(t) = {}^AT_{\alpha}(t)u_0 + \int\limits_1^t {}^AT_{\alpha}\left(\frac{t}{s}\right)h(s)\,\frac{ds}{s}. \tag{10}$$

2. Задача Коши с регуляризованной дробной производной Адамара. На непрерывных при $t \geq a > 0$ функциях $u(t)$, имеющих левостороннюю дробную производную Адамара порядка $\alpha \in (0,1)$, определим регуляризованную дробную производную Адамара

$${}^A\partial^{\alpha}_{a+}u(t) = {}^AD^{\alpha}_{a+}(u(t) - u(a)) = {}^AD^{\alpha}_{a+}u(t) - \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}\frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

и рассмотрим следующую задачу Коши:

$${}^A\partial^{\alpha}_{1+}u(t) = Bu(t) + h(t), \quad t \geq 1, \tag{11}$$

$$u(1) = u_0. \tag{12}$$

Определение 3. Решением задачи (11), (12) называется непрерывная при $t \geq 1$ функция $u(t)$ такая, что ${}^AI^{1-\alpha}_{1+}u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t \geq 1$ функцию, $u(t)$ принимает значения в $D(B)$ и удовлетворяет задаче (11), (12).

Определение 4. Однородная задача (11), (12) ($h(t) \equiv 0$) называется равномерно корректной, если существуют заданная на X, коммутирующая с B операторная функция ${}^AS_{\alpha}(t)$ и числа $M > 0$, $\omega \in R$ такие, что для любого $u_0 \in D(B)$ функция ${}^AS_{\alpha}(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\|{}^AS_{\alpha}(t)\| \leq Mt^{\omega}, \quad t \geq 1.$$

Замена (4) преобразует задачу (11), (12) в задачу

$$\partial^{\alpha}_{0+}v(\tau) = Bv(\tau) + h(e^{\tau}), \quad \tau \geq 0, \tag{13}$$

$$v(0) = u_0 \tag{14}$$

с дробной производной Капуто $\partial^{\alpha}_{0+}v(\tau) = D^{\alpha}_{0+}(v(\tau) - v(0))$.

Однородная ($h(t) \equiv 0$) задача (13), (14) исследована в работе [7, гл. 2]. Пусть $g_{\tau,\alpha}(t) = t^{-\alpha}e^{1,1-\alpha}_{1,\alpha}(-\tau t^{-\alpha})$, учитывая теорему 3.1 [7], мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 1. Тогда однородная задача (11), (12) равномерно корректна и при этом*

$${}^AS_{\alpha}(t)u_0 = \int\limits_0^{\infty} g_{\tau,\alpha}(\ln t)T(\tau)u_0\,d\tau, \tag{15}$$

$$\|{}^AS_{\alpha}(t)\| \leq Mt^{\omega_1}, \quad \omega_1 > \omega^{1/\alpha}. \tag{16}$$

Следствие. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и* $\ln t = s$. *Тогда решение задачи (1), (2) и решение однородной задачи (11), (12) связаны соотношением*

$${}^AS_{\alpha}(\exp s)u_0 = I^{1-\alpha}_{0+,s}\,{}^AT_{\alpha}(\exp s)u_0.$$

Это утверждение следует непосредственно из формулы 1.2.12 монографии [6].

Условие 3. Выполнено одно из следующих требований: a) функция $h(t) \in C[1,\infty)$ принимает значения в $D(B)$, $Bh(t) \in C[1,\infty)$; b) функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \geq 1$.

Теорема 5. *Пусть* $u_0 \in D(B)$, *задача (1), (2) равномерно корректна и выполнено условие 3. Тогда задача (11), (12) имеет единственное решение, определяемое равенством*

$$u(t) = {}^A S_\alpha(t) u_0 + \int\limits_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) h(s)\,\frac{ds}{s}. \tag{17}$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия 3 функция

$$w(t) = \int\limits_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) h(s)\,\frac{ds}{s}$$

удовлетворяет нулевому начальному условию (12). Учитывая неравенство (9) и непрерывность функции $h(t)$, при $t \in [1, 1+\delta]$, $\delta > 0$ оценим норму функции $w(t)$:

$$\left\| \int\limits_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) h(s)\,\frac{ds}{s} \right\| \leq M_0 t^{\omega_1} \int\limits_1^t (\ln t - \zeta)^{\alpha-1}\,d\zeta = \frac{M_0 t^{\omega_1}}{\alpha} (\ln t)^\alpha.$$

Следовательно, функция $w(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (12).

Для функции $w(t)$, обращающейся в нуль при $t=1$, справедливо равенство ${}^A\partial_{1+}^\alpha w(t) = {}^A D_{1+}^\alpha w(t)$, поэтому в силу теоремы 3 первое слагаемое в правой части (17) удовлетворяет однородному уравнению (11) и условию (12), а второе, как следует из теоремы 4, удовлетворяет уравнению (11) и нулевому начальному условию (12). При этом условие 3 обеспечивает необходимую гладкость решения. Теорема доказана.

В случае, когда оператор B ограничен, утверждения теорем 4 и 5 принимают следующий вид (ср. с формулой (4.1.66) из [2]).

Теорема 6. *Пусть* $B \in L(X)$, $u_0 \in X$, *функция* $h(t)$ *принадлежит* $C[1,\infty)$. *Тогда однородная задача (11), (12) равномерно корректна и*

$${}^A S_\alpha(t) u_0 = E_{\alpha,1}((\ln t)^\alpha B) u_0, \tag{18}$$

а неоднородная задача (11), (12) имеет единственное решение, определяемое равенством

$$u(t) = E_{\alpha,1}((\ln t)^\alpha B) u_0 + \int\limits_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{s}\right)^\alpha B\right) h(s)\frac{ds}{s}. \tag{19}$$

3. Обратная задача. Рассмотрим задачу определения функции $u(t)$, принадлежащей $D(B)$ при $t \in (1,e]$, и элемента $p \in X$ из условий

$${}^A D_{1+}^\alpha u(t) = Bu(t) + (\ln t)^{k-1} p, \tag{20}$$

$$\lim_{t\to 1} {}^A I_{1+}^{1-\alpha} u(t) = u_0, \tag{21}$$

$$\lim_{t\to e} {}^A I_{1+}^{\beta} u(t) = u_1, \tag{22}$$

где $k > 0$, ${}^A I_{1+}^\beta u(t)$ – левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $\beta \geq 0$ (${}^A I_{1+}^\beta$ – единичный оператор при $\beta = 0$). Промежуток $t \in (1,e]$ выбран для более компактной записи формул.

Определение 5. Решением задачи (20)–(22) называется пара $(u(t), p)$, где $u(t) \in D(B)$ – непрерывная при $t \in (1, e]$ функция такая, что ${}^A I_{1+}^{1-\alpha} u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t \in (1, e]$ функцию, $p \in X$, $u(t)$ и p удовлетворяют соотношениям (20)–(22).

Задачу (20)–(22) называют обратной задачей в противоположность прямой задаче типа Коши (20), (21) с известным элементом $p \in X$. Рассматриваемую задачу можно интерпретировать как восстановление в уравнении (20) нестационарного слагаемого $(\ln t)^{k-1} p$ с помощью дополнительного граничного условия (22).

Обзор публикаций по обратным задачам для уравнений целого порядка можно найти в [8], а обратная задача (20)–(22) рассматривается впервые.

Теорема 7. *Пусть $B \in L(X)$, $u_0, u_1 \in X$. Для того чтобы задача (20)–(22) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(B)$ ограниченного оператора B выполнялось условие*

$$E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z) \neq 0, \quad z \in \sigma(B). \tag{23}$$

Доказательство. Задача (20)–(22) в силу теоремы 1 сводится к задаче нахождения функции $u(t)$ и элемента $p \in X$ таких, что справедливо соотношение

$$u(t) = (\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\ln t)^\alpha B) u_0 + \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln \frac{t}{s}\right)^\alpha B\right) (\ln s)^{k-1} p \, \frac{ds}{s}. \tag{24}$$

Из равенства (24) и граничного условия (22) для нахождения неизвестного элемента p получаем уравнение

$$\lim_{t \to e} {}^A I_{1+}^{\beta} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln \frac{t}{s}\right)^\alpha B\right) (\ln s)^{k-1} p \, \frac{ds}{s} =$$

$$= u_1 - \lim_{t \to e} {}^A I_{1+}^{\beta} ((\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\ln t)^\alpha B) u_0). \tag{25}$$

Учитывая полугрупповое свойство операции дробного интегрирования, вычисляем

$$\lim_{t \to e} {}^A I_{1+}^{\beta} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln \frac{t}{s}\right)^\alpha B\right) (\ln s)^{k-1} p \, \frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 (1-\tau)^{k+\beta-1} \tau^{j\alpha+\alpha-1} \frac{B^j p}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} \, d\tau =$$

$$= \Gamma(k) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j p}{\Gamma(j\alpha+k+\alpha+\beta)} = \Gamma(k) E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(B) p. \tag{26}$$

Аналогично имеем $\lim\limits_{t \to e} {}^A I_{1+}^{\beta} ((\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\ln t)^\alpha B) u_0) = E_{\alpha,\alpha+\beta}(B) u_0$.

Тогда уравнение (25) в операторном виде имеет представление

$$G_0 p = q_0, \tag{27}$$

где

$$G_0 p = E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(B) p, \quad q_0 = \frac{1}{\Gamma(k)} (u_1 - E_{\alpha,\alpha+\beta}(B) u_0). \tag{28}$$

Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (20)–(22) с ограниченным оператором B является разрешимость уравнения (27), т.е. отсутствие в спектре $\sigma(G_0)$ оператора G_0 точки $\lambda = 0$. В силу (28) оператор G_0 является аналитической функцией оператора B. По теореме об отображении спектра ограниченного оператора имеем $\sigma(G_0) = \sigma(E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(B)) = E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\sigma(B))$. Следовательно, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора G_0 только тогда, когда на спектре оператора B не обращается в нуль функция $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$. Теорема доказана.

Из теоремы 7 следует, что расположение нулей функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ определяет однозначную разрешимость задачи (20)–(22) с ограниченным оператором B. Как указано в [9], для уравнения первого порядка с неограниченным оператором B условие вида (23) уже не будет достаточным условием однозначной разрешимости, хотя расположение нулей также играет важную роль. Поэтому мы приведем нужные нам результаты из работы [11] об их расположении. В теореме 1 из [11] установлено, что при $\alpha \in (0,1)$, $k+\alpha+\beta > 0$ и подходящей нумерации все достаточно большие по модулю нули μ_n, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ просты и при $n \to \pm\infty$ справедлива асимптотика

$$\mu_n^{1/\alpha} = 2\pi ni + (k+\beta-1)\left(\ln 2\pi|n| + \frac{\pi i}{2}\operatorname{sign} n\right) + \ln\frac{\alpha}{\Gamma(k+\beta)} + o(1), \quad n \to \pm\infty. \tag{29}$$

Установим необходимое условие единственности решения обратной задачи (20)–(22) с неограниченным оператором B.

Теорема 8. *Пусть B – линейный замкнутый оператор в X и обратная задача (20)–(22) имеет решение $(u(t), p)$. Для того чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль μ_n целой функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора B.*

Доказательство. Пусть некоторый нуль μ_n из счетного множества нулей функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ является собственным значением оператора B с собственным вектором $h_n \neq 0$. Рассмотрим функцию $w(t) = \psi(t)h_n$ и выберем функцию $\psi(t)$ так, чтобы функция $w(t)$ удовлетворяла уравнению (20) при $p = h_n$ и нулевому начальному условию (21).

Легко проверить, что для нахождения функции $\psi(t)$ получим задачу

$${}^A D_{1+}^{\alpha}\psi(t) = \mu_n\psi(t) + (\ln t)^{k-1}, \quad \lim_{t\to 1} {}^A I_{1+}^{1-\alpha}\psi(t) = 0. \tag{30}$$

По теореме 1 задача (30) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$\psi(t) = \int\limits_1^t \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\mu_n\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha}\right)(\ln x)^{k-1}\,\frac{dx}{x}.$$

Так как μ_n – нуль функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$, то аналогично (26) получим, что

$$\lim_{t\to e} {}^A I_{1+}^{\beta}\psi(t) = \Gamma(k)\lim_{t\to e} {}^A I_{1+}^{\beta+k}((\ln t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\mu_n(\ln t)^{\alpha})) = \Gamma(k)E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = 0.$$

Функция $w(t) = \psi(t)h_n$ удовлетворяет уравнению (20) при $p = h_n$ и нулевым условиям (21) и (22), что противоречит предположению единственности решения, поскольку пара $(u(t)+w(t), p+h_n)$ также является решением задачи (20)–(22). Теорема доказана.

Далее установим однозначную разрешимость задачи (20)–(22) с неограниченным оператором B, удовлетворяющим условию 1. Как и при доказательстве теоремы 7, сведем задачу (20)–(22), учитывая равенство (10), к операторному уравнению

$$Gp = q, \tag{31}$$

$$Gp = \lim_{t\to e} {}^A I_{1+}^{k+\beta\,A} T_{\alpha}(t)p, \quad G:\ X \to X, \tag{32}$$

где ${}^{A}T_\alpha(t)$ определяется формулой (8),

$$q=\frac{1}{\Gamma(k)}(u_1-\lim_{t\to e}{}^{A}I^{\beta}_{1+}({}^{A}T_\alpha(t)u_0)),\quad q\in D(B). \tag{33}$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (20)–(22) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора G, заданного соотношением (32), обратного оператора, определенного на некотором подмножестве банахова пространства X. Для выяснения последнего факта мы получим более удобное для исследований представление оператора B с помощью резольвенты $R(z)=(zI-B)^{-1}$, сузив при этом область определения оператора G до плотного в X множества $D(B)$.

Теорема 9. *Пусть выполнено условие 1. Тогда для любого $p\in D(B)$ справедливо представление*

$$Gp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)R(z)p\,dz,\quad \sigma>\omega. \tag{34}$$

Доказательство. Пусть сначала p принадлежит $D(B^2)$, тогда $p=R^2(\lambda)p_0$, $p_0\in X$, где $\lambda\in\rho(B)$, $\rho(B)$ – резольвентное множество оператора B, $\operatorname{Re}\lambda>\sigma>\omega$. Из (32), учитывая представление полугруппы $T(t)$ через резольвенту производящего оператора, получаем, что

$$Gp=\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}\lim_{t\to e}\int\limits_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k+\beta-1}\frac{ds}{s}\int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(\ln s)T(\tau)p\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}\lim_{t\to e}\int\limits_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k+\beta-1}\frac{ds}{s}\int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(\ln s)\,d\tau\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{z\tau}R(z)R^2(\lambda)p_0\,dz. \tag{35}$$

Применяя в равенстве (35) для выражения $R(z)R^2(\lambda)$ тождество Гильберта, получаем соотношение

$$R(z)R^2(\lambda)=\frac{R(z)-R(\lambda)}{\lambda-z}\,R(\lambda)=\frac{R(z)}{(\lambda-z)^2}-\frac{R(\lambda)}{(\lambda-z)^2}-\frac{R^2(\lambda)}{\lambda-z}$$

и, учитывая, что по лемме Жордана интегралы по прямой $\operatorname{Re}z=\sigma$ от функций вида $\dfrac{\exp(z\tau)R^j(\lambda)p_0}{(\lambda-z)^{3-j}}$, $j=1,2$, обращаются в нуль, будем иметь

$$Gp=\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}\lim_{t\to e}\int\limits_0^{\ln t}(\ln t-s)^{k+\beta-1}\,ds\int\limits_0^\infty f_{\tau,\alpha}(s)\,d\tau\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp(z\tau)R(z)p_0}{(\lambda-z)^2}\,dz.$$

Выразив $f_{\tau,\alpha}(s)$ по формуле $f_{\tau,\alpha}(t)=t^{-1}e^{1,0}_{1,\alpha}(-\tau t^{-\alpha})$ и воспользовавшись формулой дробного интегрирования Римана–Лиувилля функции типа Райта (см. [6, формула (1.2.12)])

$$\frac{1}{\Gamma(k+\beta)}\int\limits_0^\eta(\eta-\rho)^{k+\beta-1}\rho^{-1}e^{1,0}_{1,\alpha}(-\tau\rho^{-\alpha})\,d\rho=\eta^{k+\beta-1}e^{1,k+\beta}_{1,\alpha}(-\tau\eta^{-\alpha}),$$

заключаем, что

$$Gp=\int\limits_0^\infty e^{1,k+\beta}_{1,\alpha}(-\tau)\,d\tau\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp(z\tau)R(z)p_0}{(\lambda-z)^2}\,dz=$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R(z)p_0\,dz}{(\lambda-z)^2} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \xi^{-k-\beta} e^{\xi}\,d\xi \int\limits_0^{\infty} \exp(z\tau)\exp(-\tau\xi^{\alpha})\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R(z)p_0\,dz}{(\lambda-z)^2} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{\xi^{-k-\beta}e^{\xi}}{\xi^{\alpha}-z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z) \frac{R(z)p_0}{(\lambda-z)^2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)\, \frac{R(z)((\lambda-z)I+(zI-B))(\lambda I-B)p}{(\lambda-z)^2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)}{\lambda-z} R(z)(\lambda I-B)p\,dz, \quad p \in D(B^2), \tag{36}$$

при этом мы считали $\operatorname{Re}\xi^{\alpha} > \operatorname{Re} z$ и использовали равенство (1.1.12) из [6]

$$e_{1,\alpha}^{1,k+\beta}(-\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi^{-k-\beta} \exp(\xi-\tau\xi^{\alpha})\,d\xi$$

и формулу [1, формула (1.93)]

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{\xi^{-k-\beta}e^{\xi}}{\xi^{\alpha}-z}\,d\xi = E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z).$$

Если обозначить $p_1 = (\lambda I - B)p$, то $p_1 \in D(B)$, $p = R(\lambda)p_1$ и равенство (36) примет вид

$$GR(\lambda)p_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)}{\lambda-z}\, R(z)p_1\,dz, \quad p_1 \in D(B). \tag{37}$$

Левая и правая части равенства (37) представляют собой ограниченные операторы, которые совпадают на $D(B)$. В силу плотности $D(B)$ в X равенство (37) верно при всех $p_1 \in X$. Но тогда $p = R(\lambda)p_1 \in D(B)$ и для таких p справедливо представление

$$Gp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)}{\lambda-z}\, R(z)((\lambda-z)I+(zI-B))p\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)R(z)p\,dz.$$

Теорема доказана.

Переходим теперь к установлению достаточных условий однозначной разрешимости задачи (20)–(22). Как следует из теоремы 8, нам придется потребовать, чтобы ни один нуль μ_n функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора B. Более того, для установления разрешимости потребуем, чтобы все нули принадлежали резольвентному множеству $\rho(B)$. Учитывая их асимптотику (29), отметим, что при $k+\beta > 1$ условие будет налагаться лишь на конечное число нулей μ_n, $n = 1, 2, \ldots, n_0$, с $\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$, поскольку остальные автоматически принадлежат $\rho(B)$. В случае $k+\beta \le 1$ нулей с $\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество.

Теорема 10. *Пусть оператор B удовлетворяет условию 1, $k+\beta > 1$, $\sigma > \omega$ и $u_0, u_1 \in D(B^3)$. Если каждый нуль μ_n, $n = 1, 2, \ldots, n_0$, функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(B)$, то задача (20)–(22) имеет единственное решение.*

Доказательство. Существование единственного решения задачи (20)–(22) (или операторного уравнения (31)) сводится к существованию обратного у ограниченного оператора G, определяемого равенством (32) (или (34)). При $u_0, u_1 \in D(B^3)$ в силу инвариантности $D(B)$ относительно $T_\alpha(t)$ правая часть уравнения (31) q принадлежит $D(B^3)$. Покажем, что оператор G имеет обратный оператор $G^{-1}: D(B^3) \to X$.

Поскольку каждый нуль $\mu_n^{1/\alpha}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)$ с $\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(B)$, то он принадлежит $\rho(B)$ вместе с некоторой круговой окрестностью Ω_n. Пусть Γ – контур на комплексной плоскости, состоящий из прямой $\operatorname{Re} z = \sigma > \omega$ и границ γ_n круговых окрестностей Ω_n, т.е. $\Gamma = \{\operatorname{Re} z = \sigma\} \bigcup_{\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \gamma_n$.

Возьмем $\lambda \in \rho(B)$, $\operatorname{Re}\lambda > \sigma > \omega$, и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Upsilon q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{R(z)q\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3}, \quad \Upsilon: E \to E. \tag{38}$$

Отметим, что интеграл в (38) абсолютно сходится в силу выбора контура Γ, неравенства Хилле–Иосиды $\|R^n(z)\| \le M/(\operatorname{Re} z - \omega)^n$, $n \in N$, и асимптотического поведения функции Миттаг–Леффлера при $0 < \alpha < 2$ и $|z| \to \infty$ (см. [10, с. 134])

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\mu)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{z^{-j}}{\Gamma(\mu - \alpha j)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),$$
$$|\arg z| \le \nu\pi, \quad \nu \in (\alpha/2, \min\{1,\alpha\}), \tag{39}$$

$$E_{\alpha,\mu}(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha j) z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad \nu\pi \le |\arg z| \le \pi. \tag{40}$$

Пусть $q \in D(B)$, $\sigma < \sigma_1 < \operatorname{Re}\lambda$. Тогда, подставляя представление (34) в (38) и применяя тождество Гильберта, получаем равенство

$$\Upsilon G q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{R(z)\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\xi) R(\xi) q\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_\Gamma \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\xi)}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3} \frac{R(z)q - R(\xi)q}{\xi - z}\,d\xi\,dz. \tag{41}$$

Интеграл в (41) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$\Upsilon G q = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_\Gamma \frac{R(z)q\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\xi)\,d\xi}{\xi - z} -$$

$$- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\xi) R(\xi) q\,d\xi \int\limits_\Gamma \frac{dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3(\xi - z)}. \tag{42}$$

Внутренний интеграл во втором слагаемом (42) равен нулю в силу выбора контура Γ и леммы Жордана, а для вычисления интегралов в первом слагаемом используем интегральную формулу Коши. Таким образом, при $q \in D(B)$ справедливо равенство

$$\Upsilon G q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{R(z)q}{(z-\lambda)^3}\,dz = R^3(\lambda) q.$$

Коммутирующие операторы Υ, G, $R(\lambda)$ ограничены и область определения $D(B)$ плотна в X, поэтому равенство $\Upsilon Gq = R^3(\lambda)q$ справедливо и для $q \in X$, $\Upsilon G: X \to D(B^3)$. Отсюда следует, что оператор $G^{-1}q = (\lambda I - B)^3\Upsilon q$ при $q \in D(B^3)$ является обратным по отношению к G. Действительно,

$$GG^{-1}q = G(\lambda I - B)^3\Upsilon q = G\Upsilon(\lambda I - B)^3 q = R^3(\lambda)(\lambda I - B)^3 q = q, \quad q \in D(B^3),$$

$$G^{-1}Gq = (\lambda I - B)^3\Upsilon Gq = q, \quad q \in X.$$

В решении задачи (20)–(22) принадлежащий X элемент p имеет вид $p = (\lambda I - B)^3\Upsilon q$, где элемент $q \in D(B^3)$ определяется равенством (33), оператор Υ – равенством (38), $\lambda \in \rho(B)$, $\operatorname{Re}\lambda > \sigma > \omega$, а для функции $u(t)$ справедливо представление

$$u(t) = {}^AT_\alpha(t)u_0 + \int\limits_1^t (\ln s)^{k-1}\,{}^AT_\alpha\left(\frac{t}{s}\right)p\,\frac{ds}{s}$$

с оператором ${}^AT_\alpha(t)$, определенным формулой (8). Теорема доказана.

В случае $k+\beta \le 1$, как уже отмечалось, у функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ будет счетное множество нулей μ_n с $\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$, поэтому мы потребуем выполнения следующего условия.

Условие 4. Каждый нуль μ_n, $n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(B)$ и существуют $\varepsilon \in [0,1)$ и $d > 0$ такие, что $\sup\limits_{\operatorname{Re}\mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \|R(\mu_n)/\mu_n^\varepsilon\| \le d$.

Теорема 11. *Пусть выполнены условия 1 и 4,* $k+\beta \le 1$ *и* $u_0, u_1 \in D(B^3)$. *Тогда задача (20)–(22) имеет единственное решение.*

Доказательство. Так же, как и в теореме 10, введем оператор Υ, определяемый равенством (38). В этом случае контур Γ содержит уже счетное множество окружностей γ_n, и для доказательства абсолютной сходимости интеграла в равенстве (38) рассмотрим интеграл по окружностям γ_n, где n достаточно большие ($|n| \ge n_0$). Тогда по теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\cup\gamma_n\\ |n|\ge N_0}} \frac{R(z)q\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3} = \sum_{\substack{n=-\infty\\ |n|\ge N_0}}^{+\infty} \frac{R(\mu_n)q}{E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)(\lambda-\mu_n)^3}, \tag{43}$$

при этом, учитывая соотношение (см. [10, формула (1.5), с. 118])

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha\mu_n}(E_{\alpha,k+\alpha+\beta-1}(\mu_n) - (k+\alpha+\beta-1)E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n))$$

и асимптотики (39) и (29), получаем равенство

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha\mu_n}\Bigg(\frac{\mu_n^{(2-k-\beta)/\alpha-1}(2\pi|n|)^{k+\beta-2}\exp(i\operatorname{Im}\mu_n^{1/\alpha})}{\Gamma(k+\beta-1)} - \frac{1}{\Gamma(k+\beta-1)\mu_n} -$$

$$-\frac{(k+\alpha+\beta-1)\mu_n^{(1-k-\beta)/\alpha-1}(2\pi|n|)^{k+\beta-1}\exp(i\operatorname{Im}\mu_n^{1/\alpha})}{\Gamma(k+\beta)} + \frac{k+\alpha+\beta-1}{\Gamma(k+\beta)\mu_n} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|^2}\right)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{\alpha\mu_n^{2-1/\alpha}}\left(\frac{\exp(i\operatorname{Im}\mu_n^{1/\alpha})}{\Gamma(k+\beta)}\left(\frac{2\pi|n|}{\mu_n^{1/\alpha}}\right)^{1-k-\beta} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|^{1/\alpha}}\right)\right). \tag{44}$$

В силу равенства (44), условия 4 и асимптотики нулей (29) ряд (43), а следовательно, и интеграл по $\cup\gamma_n$ абсолютно сходятся. Сходимость же интеграла по прямой $\operatorname{Re}z = \sigma$ в равенстве (38) следует из неравенства Хилле–Иосиды и асимптотики (40).

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 10, мы его опускаем и тем самым завершаем доказательство теоремы 11.

Замечание. В обратной задаче для уравнения с регуляризованной дробной производной Адамара, как следует из формул (10), (17), влияние неоднородности на вид решения задачи Коши в случае регуляризованной дробной производной Адамара определяется тем же выражением, что и в случае нерегуляризованной дробной производной Адамара. Поэтому и условие разрешимости обратной задачи для уравнения с регуляризованной дробной производной Адамара при $k \geq 1$ будет таким, как и в теоремах 10 и 11.

Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы (госконтракт 02.740.11.0613).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and application of fractional differential equations. Math. Studies. V. 204. Elsevier, 2006.
3. *Килбас А.А., Марзан А.А., Титюра А.А.* Дробные интегралы и производные типа Адамара и дифференциальные уравнения дробного порядка // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 6. С. 734–738.
4. *Глушак А.В., Манаенкова Т.В.* Абстрактные дифференциальные уравнения, содержащие дробные производные Адамара // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. 2009. Т. 11. № 1. С. 17–20.
5. *Глушак А.В.* О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. ВГУ. Сер. Физика, математика. Воронеж, 2002. № 1. С. 121–123.
6. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005.
7. *Bajlekova E.* Fractional Evolution Equations in Banach Spaces // Ph. D. Thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven. 2001.
8. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel, 2000.
9. *Эйдельман Ю.С.* Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 4. С. 15–18.
10. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
11. *Седлецкий А.М.* О нулях функции типа Миттаг–Леффлера // Мат. заметки. 2000. Т. 68. Вып. 5. С. 710–724.

Белгородский государственный университет

Поступила в редакцию
30.04.2009 г.