И.В. Апухтина, О.А. Тарасова, О.В. Чернова

Кратные интегралы и ряды
Учебное пособие

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения и основные формулы по следующим разделам: кратные и криволинейные интегралы, числовые и функциональные ряды.

В каждом пункте рассматривается большое количество примеров с подробным решением. Имеются задачи для аудиторной и самостоятельной работы.

Предназначено для преподавателей и самостоятельной работы студентов по программе курса «Кратные интегралы и ряды».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих прикладных задач требуется соответствующий многомерный математический аппарат. Интегральное исчисление функции одной переменной позволяет решать задачи вычисления площади и объема. Задачи эти многомерные, а математический аппарат, который используется при решении – одномерный (определенный интеграл). Поэтому решение возможно только в частных случаях. Полное решение таких задач, как будет показано далее, дается с помощью многомерных определенных интегралов.

Как видно из оглавления, кратным интегралам посвящены 4 пункта. Необходимые теоретические сведения снабжены большим количеством подробно разобранных примеров. Начало решения отмечено знаком Δ, окончание -▲. Далее предложены задачи для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

1. Двойные интегралы и их вычисление

Если функция $f(M)$, где точка М имеет координаты (x,y) непрерывна в некоторой замкнутой плоской области D и если разбить эту область произвольным способом на n частичных областей с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ выбрать в каждой из них по одной произвольной точке M_1, M_2, ..., M_n, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$I_n = f(M_1)\Delta s_1 + f(M_2)\Delta s_2 + \cdots + f(M_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по области D.

Очевидно интегральная сумма зависит как от способа разбиения области D на n частичных областей, так и от выбора в них точек M_i, т.е. для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной замкнутой области D можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм. Однако при неограниченном увеличении n и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d частичных областей все эти различные интегральные суммы имеют один общий предел.

Напомним, что диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области

Определение: *Двойным интегралом функции $z=f(x,y)$ по области D называется предел* $\lim_{d_i \to 0} I_n$, обозначаемый $\iint_D f(x,y)ds$.

Таким образом, по определению

$$\iint_D f(M)ds = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i.$$

Двойной интеграл обладает всеми основными свойствами обыкновенного определенного интеграла: область интегрирования двойного интеграла можно разбивать на части, двойной интеграл от суммы функций равен сумме двойных интегралов от всех слагаемых, постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

Вычисление двойного интеграла $\iint_D f(M)ds$ сводится к вычислению одного или нескольких двукратных интегралов вида

$$I_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} F(\alpha,\beta)d\beta\right]d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{\beta_1}^{\beta_2} F(\alpha,\beta)d\beta \text{ или}$$

$$I_2 = \int_{\beta_I}^{\beta_{II}}\left[\int_{\alpha_I}^{\alpha_{II}} F(\alpha,\beta)d\alpha\right]d\beta = \int_{\beta_I}^{\beta_{II}} d\beta \int_{\alpha_I}^{\alpha_{II}} F(\alpha,\beta)d\alpha\ ,$$

каждый из которых есть результат последовательного вычисления двух обыкновенных определенных интегралов.

В двукратном интеграле I_1 вначале функция $F\ (\alpha,\beta)$ интегрируется по β, причем α рассматривается как постоянная, а затем полученный результат интегрируется по α.

В двукратном интеграле I_2 интегрирование выполняется в обратном порядке: вначале по α, причем β рассматривается как постоянная, а затем полученный результат интегрируется по β.

Как правило, пределы при первом интегрировании являются переменными, зависят от той переменной, которая при этом рассматривается как постоянная. Пределы при втором интегрировании всегда постоянны.

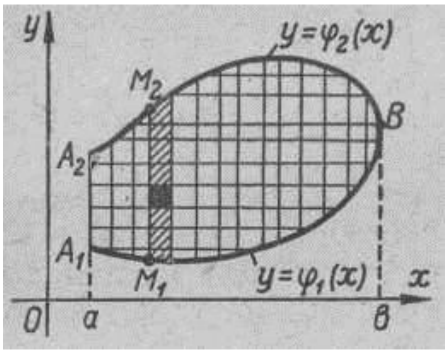


Рис.1

Если область интегрирования D отнесена к прямоугольной системе координат xOy и если она разбивается на частичные области сетью прямых, параллельных осям координат (рис. 1), то площадь частичной области $ds=dxdy$ (как площадь прямоугольника со сторонами dx и dy) и $\iint_D f(M)ds = \iint_D f(x,y)dxdy.$

Если при этом область D такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области параллельно оси Oy, пересекает ее границу в двух точках (рис. 1), то она определяется неравенствами вида

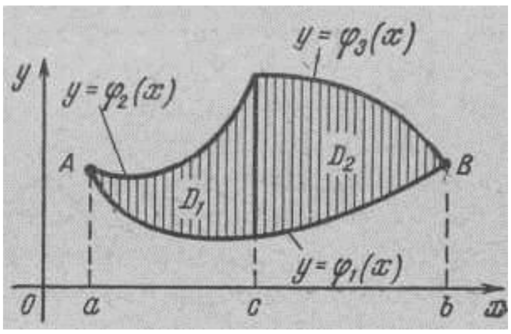


Рис. 2

$$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ a \le x \le b,$$

где $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ - уравнения нижней (A_1M_1B) и верхней (A_2M_2B) линий границы; a и b—абсциссы крайних слева и справа точек области D.

В этом случае двойной интеграл выражается через двукратный интеграл по формуле:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_{1(x)}}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

По этой формуле интегрирование выполняется вначале по *y*- в пределах от $y_1 = \varphi_1(x)$ до $y_2 = \varphi_2(x)$, которые указывают границы изменения *y* при постоянном, но произвольном значении x, а потом по x, в пределах от x_1 = a до x_2 = b, которые являются крайними (наименьшим и наибольшим) значениями x во всей области D. В этом случае, если окажется, что нижняя или верхняя линия границы состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D следует разбить прямыми, параллельными оси *Oy,* на части, в каждой из которых нижняя и верхняя линии границы определялись бы каждая одним уравнением.

Так, для области D, изображенной на рис.2, вычисление двойного интеграла приводится к вычислению двух двукратных интегралов:

$$\iint\limits_D u\,dxdy = \iint\limits_{D_1} u\,dxdy + \iint\limits_{D_2} u\,dxdy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} udy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_{1(x)}}^{\varphi_{2(x)}} u\,dy$$

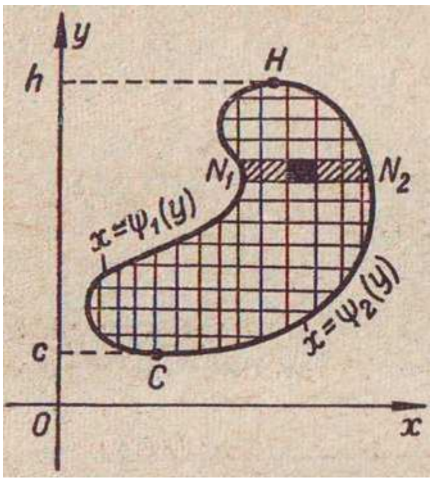


Рис. 3

Если граница области D пересекается в двух точках всякой прямой, проходящей внутри этой области параллельно оси *Ox* (рис. 3), то она определяется неравенствами вида:

$$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le h,$$

где $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ — уравнения левой (CN 1H) и правой (CN 2H) линий границы, c и h —ординаты крайних снизу и сверху точек области *D*. В этом случае двойной интеграл выражается через двукратный интеграл по формуле:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^h dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Здесь интегрирование выполняется в другом порядке: вначале по x, затем по y. Пределы внутреннего интеграла указывают границы

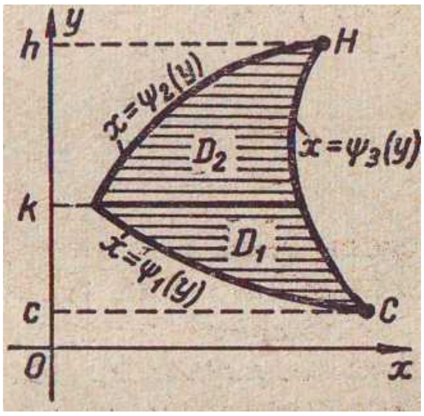


Рис. 4

изменения x при постоянном, но произвольном значении у;

пределы внешнего интеграла указывают границы, в которых может изменяться y во всей области D.

В этом случае, если левая или правая линия границы будет состоять из нескольких участков с различными уравнениями, то область D следует разбить прямыми, параллельными оси Ox на части, где левая и правая линии границы определялись бы каждая одним уравнением.

Согласно этому положению, двойной интеграл по области D, изображенной на рис.4, сводится к двум двукратным интегралам:

$$\iint_D u\, dxdy =$$

$$\iint_{D_1} udxdy + \iint_{D_2} u\, dxdy = \int_c^h dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} u\, dx + + \int_k^h dy \int_{\psi_2(y)}^{\psi_2(y)} u\, dx.$$

Пределы внешнего интеграла всегда постоянны. Пределы внутреннего интеграла, как правило, являются переменными и зависят от той переменной, которая рассматривается как постоянная.

Замечание: ***О****ба эти предела будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования представляет прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.*

Пример: Вычислить двукратный интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1)dy$$

Δ Сначала вычисляем внутренний интеграл, где y является переменной, а x постоянной: $\int_x^{2x}(x - y + 1)dy = xy - \frac{y^2}{2} + y\Big|_{y=x}^{y=2x} = x - \frac{x^2}{2}$. Далее вычисляем внешний интеграл, — полученный результат, интегрируем по x: $\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. ▲

Пример: Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy\,dx\,dy$, если область D-прямоугольник, ограниченный линиями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$.

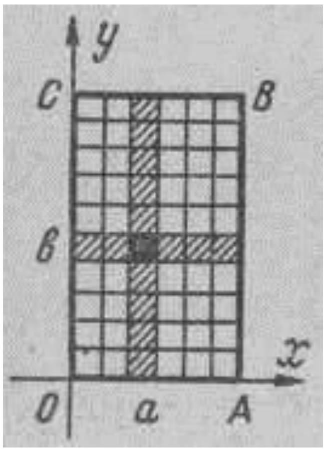


Рис. 5

Δ Построив прямые (рис. 5), получим прямоугольник OABC со сторонами, параллельными осям координат.

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^a xdx \int_0^b ydy = \int_0^a \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^b xdx =$$

$$= \frac{b^2}{2}\int_0^a xdx = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2b^2}{4}.$$

▲

Пример: Дан повторный интеграл $I = \int_0^4 dx \int_{3x^2/8}^{3\sqrt{x}} dy$. Изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл при заданном и измененном порядках интегрирования.

Δ Область интегрирования D расположена между прямыми x = 0 и x= 4, ограничена снизу параболой $y = 3x^2/8$, сверху параболой $y = 3\sqrt{x}$. Следовательно,

$$I = \int_0^4 dx \int_{3x^2/8}^{3\sqrt{x}} dy = \int_0^4 y\Big|_{3x^2/8}^{3\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(3\sqrt{x} - 3x^2/8\right) dx = \left(2x^{\frac{3}{2}} - x^3/8\right)\Big|_0^4 = 8.$$

С другой стороны, область интегрирования D расположена между прямыми y = 0 и y = 6, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном значении y от точек параболы $x = y^2 / 9$ до точек параболы $x = \sqrt{\frac{8y}{3}}$, имеем

$$I = \int_0^6 dy \int_{y^2/9}^{\sqrt{\frac{8y}{3}}} dx = \int_0^6 \left(\sqrt{\frac{8y}{3}} - \frac{y^2}{9}\right) dy = \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - y^3\cdot\frac{1}{27}\right)\Big|_0^6 = 8.$$ ▲

2. В аудитории

1. Вычислить двойной интеграл:

1.1. $\iint_D\ xln(y)dxdy$, если область D – прямоугольник $0 \le x \le 4, 1 \le y \le e$.

1.2. $\iint_D\ \left(cos^2(x) + sin^2(x)\right)dxdy$, если область D – квадрат $0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 1 \le y \le \frac{\pi}{4}$.

2. Вычислить двойной интеграл, если область D ограничена заданными линиями:

2.1. $\iint_D\ (x + 2y)dxdy,\ y = x,\ y = 2x,\ x = 3.$

2.1. $\iint_D\ (x^2 + y^2)dxdy,\ y = x,\ y = 1, y = 2,\ x = 0.$

2.3. $\iint_D\ \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, *x=2, y=x, x=2y;*

3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

3.1. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)dy;$

3.2. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)dy$

3. Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить двойной интеграл:

1.1. $\iint_D\ (3x + y)dxdy$, если область D определяется неравенствами $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge \frac{2}{3}x + 3$.

1.2. $\iint_D\ xdxdy$, если область D – треугольник с вершинами $A(2,3), B(7,2), C(4,5)$.

2. Вычислить двойной интеграл, если область D ограничена заданными линиями:

2.1. $\iint_D\ (x + y + 3)dxdy,\ x + y = 2,\ y = 0,\ x = 0.$

2.2. $\iint_D\ (x^2 + y)dxdy,\ y = x^2,\ y^2 = x.$

2.3. $\iint_D\ sin(x + y)dxdy\ ,\ y = 0,\ y = x,\ x + y = \frac{\pi}{2};$

3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

3.1. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx;$

3.2. $\int_{-3}^8 dy \int_{y^2-4}^5 (x + 2y)dx$

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.Тройной интеграл и его вычисление

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M некоторой замкнутой пространственной области G и если разбить эту область произвольным способом на n частичных областей с объемами $\Delta v_{1,}\ \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$, выбрать в каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \dots, Mn$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму:

$$f(M_1)\Delta v_1 + f(M_2)\Delta v_2 + \cdots + f(M_n)\Delta v_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$$

то она называется интегральной суммой функции *f(M)* по области *G*. При составлении интегральной суммы можно различными способами разбивать область G на *n* частичных областей и в каждой из них можно произвольно выбирать одну точку M_i. Поэтому для всякой данной функции *f(M)* и всякой данной области *G* можно составить сколько угодно различных интегральных сумм. И все эти интегральные суммы при неограниченном возрастании *n* и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей имеют один общий предел, который называется тройным интегралом от функции *f (M)* по области *G* и обозначается $\iiint_G f(M)dv$. Вычисление тройного интеграла сводится к трехкратному интегрированию, т. е. к последовательному вычислению трех обыкновенных (однократных) определенных интегралов по каждой из трех переменных координат точки трехмерного пространства:

$$\iiint_G f(M)dv = \iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

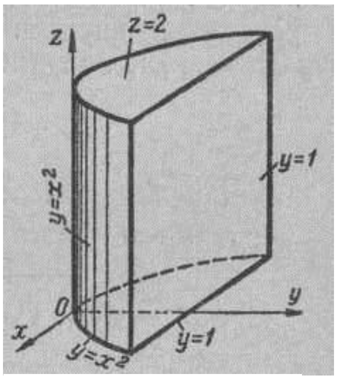


Рисунок 6

При этом, если область *G* такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области параллельно оси *Oz*, пересекает ее границу в двух точках (рис. 6), то тройной интеграл можно вычислить по формуле:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{G_{xy}} dx\,dy \int_{z=\psi_1(x,y)}^{z=\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \tag{1}$$

где G_{xy} – проекция области G на плоскость xOy; $z=\psi_1$ и (x,y) $z=\psi_2(x,y)$ –уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих область G.

Меняя ролями переменные x, y, z в формуле (1), можно получить и другие аналогичные формулы для вычисления тройного интеграла посредством последовательного вычисления обыкновенного и двойного интегралов.

Пример: Вычислить трехкратный интеграл $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_0^2(4+z)dz$ и построить его область интегрирования.

∆ Последовательно вычисляем три однократных интеграла, начиная с внутреннего: $I_1=\int_0^2(4+z)dz=\left.\frac{(4+z)^2}{2}\right|_0^2=\frac{36-16}{2}=10$; $I_2=\int_{x^2}^1 I_1dy=10\int_{x^2}^1 dy=10y|_{x^2}^1=10(1-x^2)$; $I_3=I=\int_{-1}^1 I_2dx=10\int_{-1}^1(1-x^2)dx=10\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^1=\frac{40}{3}$. ▲

Для построения области интегрирования данного трехкратного интеграла запишем вначале уравнения поверхностей, ограничивающих эту область. Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла его пределам, получим следующие уравнения: $x=-1$, $x=1$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=2$. Построив в системе координат $Oxyz$ поверхности, соответствующие этим уравнениям (рис. 6), видим, что ограниченная ими область есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz.

Пример: Вычислить тройной интеграл $\iiint_G\frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y}$, если область G ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

∆ Построим данные плоскости.

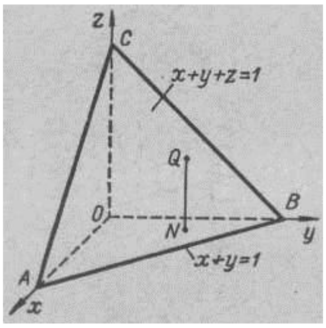


Рис. 7

Ограниченная ими область G –тетраэдр $OABC$ (рис. 7). Любая прямая, проходящая внутри этого тетраэдра параллельно оси Oz, пересекает его границу (поверхность) в двух точках. Поэтому, согласно формуле (1), вычисление данного тройного интеграла сводится к последовательному вычислению обыкновенного интеграла с переменной z и двойного интеграла с переменными x и y. Пределами однократного интеграла будут значения $z=z_0=0$ (из уравнения плоскости *ABO)* и $z = z_Q = 1 - x - y$ (из уравнения плоскости *ABC);* областью интегрирования двойного интеграла будет треугольник *ABO* (проекция тетраэдра на плоскость *xOy*. Следовательно, $\iint_{ABO} \frac{dx\,dy}{1-x-y} \int_0^{1-x-y} dz = \iint_{ABO} \frac{dx\,dy}{1-x-y} \left(z|_0^{1-x-y} \right) = \iint_{ABO} dx\,dy = S_{ABO} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{1}{2}$. ▲

Пример: Вычислить интеграл $K = \iiint_T \; y\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $y = \sqrt{x^2+z^2}$ и $y = h,\; h > 0$.

Δ Ограниченная данным поверхностями область T – конус (рис. 8).

Всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку конуса параллельно оси *Oy,* пересекает его границу в двух точках, а проекция T_{xz} этого конуса на плоскость *xOz* есть круг $x^2 + z^2 \leq h^2$. Поэтому, меняя ролями переменные z и y в формуле (1), получим:

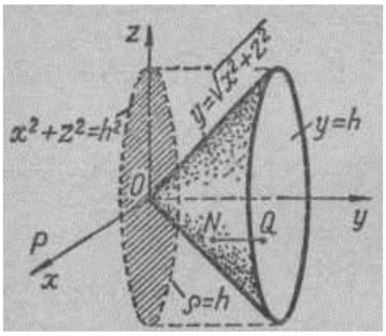


Рис. 8

$$K = \iint\limits_{T_{xz}} dx\,dz \int\limits_{y=y_N}^{y=y_Q} y dy =$$

$$= \iint_{T_{xz}} dx\,dz \int_{y=\sqrt{x^2+z^2}}^{y=h} y dy = \iint_{T_{xz}} \frac{y^2}{2}\Big|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{h} dx\,dy =$$

$= \frac{1}{2} \iint_{x^2+z^2 \leq h^2} (h^2 - x^2 - z^2) dx\,dz$. Полученный двойной интеграл преобразуем к полярным координатам ($x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$ и $dxdz = \rho\, d\varphi d\rho$):

$K = \frac{1}{2} \iint_{\rho \leq h} (h^2 - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h (h^2\rho - \rho^3) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{h^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right)\Big|_0^h d\varphi = \frac{h^4}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^4}{4}$. ▲

2. В аудитории

1. Вычислить трехкратные интегралы:

1.1. $\int_0^a y dy \int_0^h dx \int_0^{a-y} dz$;

1.2. $\int_0^c dz \int_0^b dy \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2) dx$.

2. Вычислить тройной интеграл, ограниченный данными поверхностями:

2.1. $I = \iiint_V \; (2x + y) dxdydz, y = x, y = 0, x = 1, z = 1, z = 1 + x^2 + y^2$;

2.2. $I = \iiint_V \; \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz,\; x^2 + y^2 = 4, z = 1, z = 2 + x^2 + y^2$;

2.3. $\iiint_G \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz$, где область G расположена в первом октанте и ограничена конусом $4z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=1$;

2.4. $\iiint_Q (1-x)^2\sqrt{1-y^2}\, dxdydz$, где Q-куб, ограниченный плоскостями $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$;

3. Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить трехкратные интегралы:

1.1. $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^2 xdx \int_0^3 z^2 dz$;

1.2. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} ydy \int_{1-x}^{2-2x} dz$.

2. Вычислить тройной интеграл, ограниченный данными поверхностями:

2.1. $I = \iiint_V x^2y^2z dxdydz, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy$;

2.2. $\iiint_G (2x+3y-z)dxdydz$, где G –призма, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$, $x+y=2$;

2.3. $\iiint_Q dxdydz$, где Q –параллелепипед, ограниченный плоскостями $x+y=1$, $x+y=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=3$;

2.4. $\iiint_W (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где область W, ограниченная поверхностью $z^2 = 3(a^2-x^2-y^2)$ есть эллипсоид вращения.

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2, y+z=4, z=0$.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

1. Определение криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги)

Пусть в пространстве переменных x, y, z задана кусочно-гладкая дуга L_{AB} кривой L, на которой определена функция$f(x,y,z)$. Разобьём дугу L_{AB} произвольным образом точками на n частей l_i, длиной $\Delta l_i (i=\overline{1,n})$.На каждой из дуг l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ (рис.1) и составим интегральную сумму

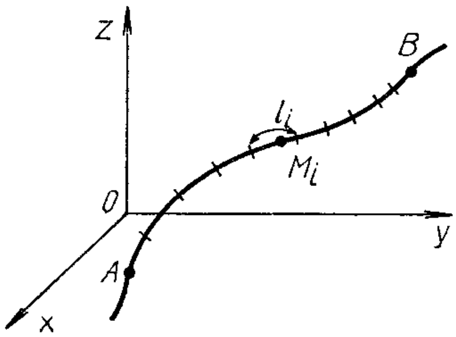


Рис. 1

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta l_i.$$

Тогда предел $\lim_{\Delta l_i \to 0} I_n$ всегда существует, и называется криволинейным интегралом первого рода, или криволинейным интегралом по длине дуги L_{AB} от функции $f(x,y,z)$ и обозначается

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\cdot dl.$$

Таким образом, по определению

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta l_i.$$

Определение: *Если кривая L лежит в плоскости Oxy и вдоль этой кривой задана непрерывная функция f(x, y), то*

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta l_i. \qquad (1)$$

Определение: *Если кривая L задана параметрическими уравнениями x=x(t), y=y(t), z=z(t) и параметр t изменяется монотонно на отрезке [t_1; t_2] при перемещении по кривой L из точки A в точку B, то верна формула для вычисления криволинейного интеграла*

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt. \qquad (2)$$

Пример: Вычислить $\int_{L_{AB}} \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$где L – первый виток канонической линии $x=t\cos(t), y=t\sin(t), z=t, 0\le t \le 2\pi$.

Δ Находим

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt = \sqrt{(cos(t) - t\sin(t))^2 + \left(\sin(t) + tcos(t)\right)^2 + 1}dt$$

$= \sqrt{2 + t^2}dt.$

Тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dl == \int_0^{2\pi}(2t - t)\sqrt{2 + t^2}dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}dt = \frac{1}{3}(2 + t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi} == \frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$ ▲

Пример: Вычислить $\int\limits_L (x+y+z)dl$, где L - один виток спирали $L: \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = at;\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

Δ Переходим к определённому интегралу, для этого сначала находим:

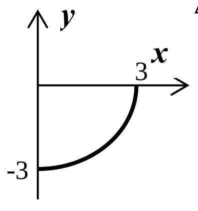
$x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t,\ z'(t) = a,\ \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{R^2 + a^2}$, тогда получим

$$\int\limits_L (x+y+z)dl = \int\limits_0^{2\pi}(R\cos t + R\sin t + at)\sqrt{R^2 + a^2}dt = 2\pi^2 a\sqrt{R^2 + a^2}.$$ ▲

Определение: *Если кривая L задана параметрическими уравнениями x=x(t), y=y(t) и параметр t изменяется монотонно на отрезке [t $_1$; t $_2$] при перемещении по кривой L из точки A в точку B, то верна формула для вычисления криволинейного интеграла*

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \qquad (3)$$

Пример: Вычислить $\int\limits_L xy^2 dl$, где L - четверть окружности $x^2 + y^2 = 9$, лежащая в четвёртом квадранте.



Δ Возьмем обычные параметрические уравнения окружности:

$\boldsymbol{x} = 3\cos \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{y} = 3\sin \boldsymbol{t},\ 3\pi/2 \le \boldsymbol{t} \le 2\pi$

Тогда

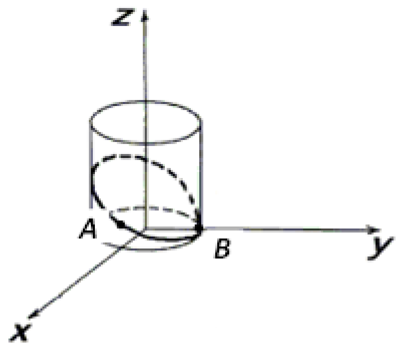
$$\int\limits_L xy^2 dl = \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} 3\cos t \cdot (3\sin t)^2 \cdot \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}dy = 81\frac{\sin t^3}{3}\Bigg|_{3\pi/2}^{2\pi} = 27.$$ ▲

Определение: *Если уравнение плоской кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярных координатах ρ, φ, функция $\rho(\varphi)$ и ее производная $\rho' = d\rho/d\varphi$ непрерывны, то имеет место частный случай формулы (3), где в качестве параметра t взят полярный угол φ:*

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int_{\varphi_B}^{\varphi_A} f[\rho(\varphi)cos(\varphi), \rho(\varphi)sin(\varphi)]\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi, (4)$$

(φ_A и φ_B - значения φ, определяющие на кривой точки A и B).

Пример: Найти $\int_{L_{AB}} xydl$, где L_{AB} - часть сечения цилиндра $x^2+y^2=4$ плоскостью z=x+1, лежащая в первом октанте.



Δ Параметрические уравнения окружности - направляющей цилиндра имеют вид

$\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = 2\sin\varphi, \end{cases}$ и так как z=x+1, то z= 2cosφ+1.

Итак, $\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = 2\sin\varphi, \\ z = 2\cos\varphi + 1, \\ 0 \le \varphi \le \pi/2; \end{cases}$ поэтому

$$\int_{L_{AB}} xydl = 8\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{8}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2\varphi}\, d\sin^2\varphi =$$
$$= \frac{8}{3}(1+\sin^2\varphi)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = 8\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

▲

Определение: *Если плоская кривая задана непрерывной и непрерывно дифференцируемой на [a; b] функцией y=y(x), где a и b – абсциссы точек A и B, то*

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int_b^a f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx. \qquad (5)$$

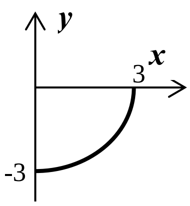
Пример: Вычислить $\int_{L_{AB}} (x-y)dl$,где L_{AB} –отрезок прямой от А(0;0) до В(4;3).

Δ Уравнение прямой АВ имеет вид y=(3/4)x. Находим y′=3/4 и, следовательно,

$$\int_{L_{AB}} (x-y)dl = \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int_0^4 xdx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}. \ ▲$$

Пример: Вычислить

$\int_L xy^2 dl$, где L - четверть окружности $x^2+y^2=9$, лежащая в четвёртом квадранте.



Δ <u>1 случай</u>: Рассматривая x как параметр, получаем

$y = -\sqrt{9-x^2}$, $y'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$, $\sqrt{1+y'^2(x)} = \dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}$, поэтому

$$\int_L xy^2 dl = \int_0^3 x\left[-\sqrt{9-x^2}\right]^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx = 3\int_3^3 x\sqrt{9-x^2}dx = -[\sqrt{9-x^2}\,]^3 - [\sqrt{9-x^2}\,]^3\Big|_0^3 = 27.$$

<u>2 случай</u>: Если за параметр взять переменную y, то $x=\sqrt{9-y^2}$, $x'(y)=\dfrac{-y}{\sqrt{9-y^2}}$,

$dl=\dfrac{3dy}{\sqrt{9-y^2}}$ и тогда $\int\limits_L xy^2dl=\int\limits_0^3\sqrt{9-y^2}\,y^2\cdot\dfrac{3}{\sqrt{9-y^2}}dy=y^3\Big|_0^3=27.$ ▲

Пример: Вычислить $\int\limits_{L_{AB}}(x+y+z)dl$, где L_{AB} отрезок прямой, соединяющей

точкиA(1,2,3) и B(-3,3,-8).

Δ Здесь прямого параметрического задания кривой нет, поэтому на AB необходимо

ввести параметр. Параметрические уравнения прямой имеют вид: $\begin{cases} x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}$

где $\vec{a}\{m,n,p\}$ - направляющий вектор, (x_0,y_0,z_0) - точка прямой. В качестве точки

берем точкуA(1,2,3), в качестве направляющего вектора - вектор $\overrightarrow{AB}=$

$\{-4,1,-11\}$,тогдауравнение прямой примет вид: $\begin{cases} x=1-4t,\\ y=2+t,\\ z=3-11t,\end{cases}$.

Откуда $dl=\sqrt{16+1+121}dt=\sqrt{138}dt.$Легко видеть, что точка A(1,2,3) соответствует значению $t=0$, а точка B(-3,3,-8)соответствует значению $t=1$, поэтому

$\int\limits_{AB}(x+y+z)dl=\int\limits_0^1[(1-4t)+(2+t)+(3-11t)]\sqrt{138}dt=\sqrt{138}\int\limits_0^1(6-14t)dt=-\sqrt{138}.$ ▲

Замечание: Из выше разобранных примеров можно сделать вывод, что во всех случаях вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Так как, согласно формулам (2) - (5), криволинейный интеграл первого рода выражается через определенный интеграл, то укажем только те свойства, которые обобщают свойства определенного интеграла.

1. Независимость криволинейного интеграла первого рода от направления прохождения кривой:

$$\int\limits_{L_{AB}}f(x,y,z)\cdot dl=\int\limits_{L_{BA}}f(x,y,z)\cdot dl\,.$$

2. Геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода

$$\int_{L_{AB}}dl=l_{AB},$$

где $l_{AB}-$ дина дуги AB.

3. Механический смысл криволинейного интеграла первого рода: если f(x,y,z)=δ(x,y,z) –линейная плотность материальной дуги L_{AB}, то ее масса mвычисляется по формуле

$$m = \int_{L_{AB}} \delta(x, y, z)\, dl \qquad (6)$$

4. Координаты центра масс материальной дуги L_{AB}, имеющей линейную плотность δ(x,y,z), определяются по формулам:

$$x_C = \frac{1}{m}\int_{L_{AB}} x\delta(x,y,z)dl, y_C = \frac{1}{m}\int_{L_{AB}} y\delta(x,y,z)dl, z_C = \frac{1}{m}\int_{L_{AB}} z\delta(x,y,z)dl, \qquad (7)$$

где m – масса дуги L_{AB}.

Пример: Вычислить массу m и координаты центра массx_C, y_C, z_C плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, 0 \le x \ \le 1$,линейная плотность которой $\delta(x,y) = y\sqrt{1+x}$.

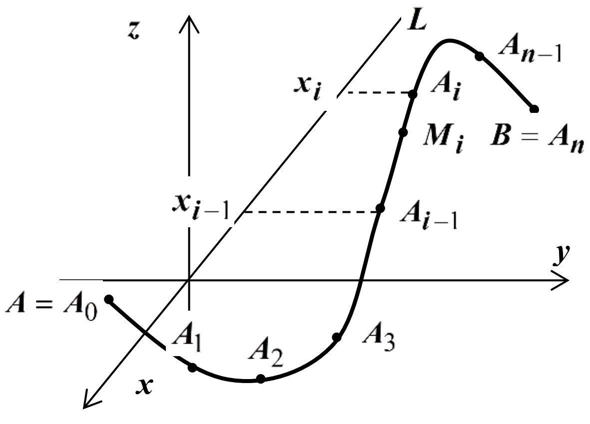
Δ Согласно формулам (5) и (6),для случая плоской дуги имеем:

$$m = \int_0^1 \delta(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})\,dx = \frac{16}{35}.$$

По формулам (7) находим:

$$x_C = \frac{35}{16}\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})dx = \frac{10}{9}, y_C = \frac{35}{16}\int_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})dx = \frac{35}{24}\int_0^1 (x^3 + x^4)dx = \frac{21}{23}. \ ▲$$

2. Определение криволинейный интеграл второго рода (по координатам)



Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ **за**дан вектор $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$, координаты которого – непрерывные функции в точках ориентированной кривой L_{AB}. Кривую L_{AB} разобьём кривую точками $A_0(x_0, y_0, z_0) = A$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, A_i(x_i, y_i, z_i), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n) = B$на n элементарных дуг l_iи построим векторы $\overrightarrow{\Delta l_\iota} = \Delta x_i\vec{\imath} + \Delta y_i\vec{\jmath} + \Delta z_i\vec{k}$, где $\Delta x_i, \Delta y_i$, Δz_i –проекции векторов $\overrightarrow{\Delta l_\iota}$на оси координат. Из рисунка видно, что начала этих векторов совпадают с началами элементарных дуг, а концы – с их концами [4].

На каждой из элементарных дуг l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \begin{matrix} P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(x_i, y_i, z_i)\,\overrightarrow{\Delta l_i}. \end{matrix} \qquad (8)$$

Определение: *Предел суммы (8), найденный при условии, что все* $\left|\overrightarrow{\Delta l_i}\right| \to 0$*, называется криволинейным интегралом второго рода, или криволинейным интегралом от вектор-функции* $\vec{a}(x_i, y_i, z_i)$ *по кривой* L_{AB}*, и обозначается*

$$\int_{L_{AB}} \vec{a}(x, y, z)dl =$$

$$\int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \lim_{\overrightarrow{\Delta l_i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(x_i, y_i, z_i)\overrightarrow{\Delta l_i}. \qquad (9)$$

Если функции $P(x, y, z)dx, Q(x, y, z)dy, R(x, y, z)dz$ непрерывны в точках гладкой кривой L_{AB}, то предел суммы (9) существует, т.е. существует криволинейный интеграл второго рода (10).

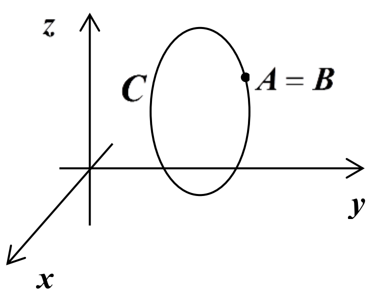
Основные свойства криволинейного интеграла второго рода

1.Криволинейные интегралы второго рода обладают основными свойствами определенных интегралов (линейность, аддитивность).

2. Изменение знака криволинейного интеграла второго рода при изменении направления прохождения кривой:

$$\int_{L_{AB}} P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz = -\int_{L_{BA}} P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz .$$

Если кривая, по которой ведётся интегрирование, является контуром (т.е. замкнута), то, как и для криволинейного интеграла, по длине дуги, в качестве начальной (и совпадающей с ней конечной) точки можно взять любую точку кривой.



В этом случае криволинейные интегралы второго рода обозначаются:

$$\oint_{L} \vec{a} \cdot dl .$$

То, что кривая, по которой вычисляется интеграл, замкнута, принято обозначать кружочком на знаке интеграла.

Если гладкая кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями x=x(t), y=y(t), z=z(t), где x(t), y(t), z(t) – непрерывно дифференцируемые функции, A(x(α), y(α), z(α)) и B(x(α), y(α), z(α)) –соответственно начальная и конечная точки этой кривой, то верна следующая формула

$$\int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right]\,dt. \qquad (10)$$

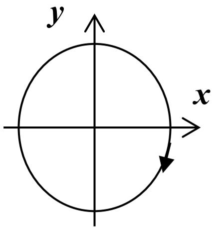
Пример: Найти$\int_{L_{AB}} ydx - xdy + zdz$,где$L_{AB}$ – виток винтовой линии x=a·cos t, y=a·sin t, z=a·t, 0 ≤ t ≤ 2π.

$$\Delta \int_{L_{AB}} ydx - xdy + zdz = \int_0^{2\pi} (a\sin t\cdot(-a\sin t) - a\cos t\cdot a\cos t + at\cdot a)dt = a^2\int_0^{2\pi}(t-1)dt = 2a^2(\pi^2-\pi). \blacktriangle$$

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy, $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$, то $R(x,y,z) = 0, z(t)$= 0 и формула (10) упрощается

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\,dt. \qquad (11)$$

Пример: Найти $\oint_c x(1-y)dx + xdy$, где C - окружность, проходимая в отрицательном направлении(по часовой стрелке).



Δ Параметризуем окружность x=2cos t, y=2sin t, 0 ≤ t ≤ 2π. Движению по часовой стрелке соответствует уменьшение параметра t, поэтому интегрируем от 2π до 0:

$$\oint_C x(1-y)dx + xdy = \int_{2\pi}^{0}(2\cos t(1-2\sin t)(-2\sin t) + 2\cos t\cdot 2\cos t)dt = \int_{2\pi}^{0}(-4\cos t\sin t +$$

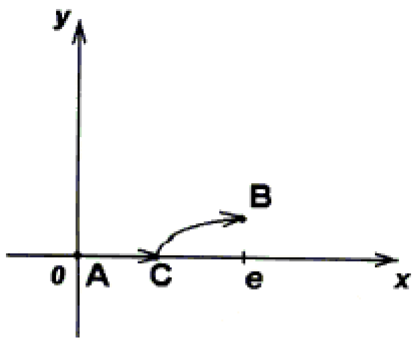
$$+8\cos t\cdot\sin^2 t + 4\cos^2 t)dt = (-2\sin^2 t + \frac{8}{3}\sin^3 t + 2t + \sin 2t)\Big|_{2\pi}^{0} = -4\pi.$$

▲

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy и задана уравнением y=f(x), производная f′(x) непрерывна на отрезке [a; b], $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$, то

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}[P(x,f(x)) + Q(x(t),f(x))]\,f'(x)\,dx. \qquad (12)$$

Пример: Найти $\int_{L_{AB}}(x+y)dx + y^2dy$ по кривой $\begin{cases} y = 0, 0 \le x \le 1 \\ y = \ln x, 1 \le x \le e \end{cases}$.

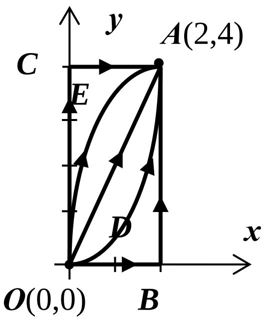


Δ Пользуясь свойством аддитивности, разобьем интеграл на сумму двух:

$$\int\limits_{L_{AB}} (x+y)dx + y^2dy = \int\limits_{L_{AC}} (x+y)dx + y^2dy + \int\limits_{L_{CB}} (x+y)dx + y^2dy = \int\limits_0^1 (x+0)dx +$$
$$+\int\limits_1^e (x + \ln x + \ln^2 x)\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} + x\ln x - x + \frac{\ln^3 x}{3}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} + \frac{4}{3}.$$

▲

Пример: Вычислить $\int\limits_L 2xydx + (x^2+y^2)dy$ по каждому из путей, соединяющих



точки O(0,0) и A(2,4), и изображённых на рисунке слева:

1. Ломаная OBA, состоящая из прямолинейных отрезков;
2. Ломаная OCA;

3.Прямолинейный отрезок OA;

4-5. Параболы ODA и OEA, симметричные относительнокоординатных осей.

Δ 1. Ломаная OBA: $\int\limits_{OBA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_{OB} 2xydx + (x^2+y^2)dy + \int\limits_{BA} 2xydx + (x^2+y^2)dy$

(по свойству аддитивности). На OB в качестве параметра естественно выбрать переменную x, при этом $y = 0, dy = 0$, поэтому $\int\limits_{OB} 2xydx + (x^2+y^2)dy = 0,$ на BA

$x = 2, dx = 0, 0 \le y \le 4$, поэтому $\int\limits_{BA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^4 \left(2^2 + y^2\right)dy = \left(4y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 37\frac{1}{3}$.

Окончательно, $I_1 = \int\limits_{OBA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = 37\frac{1}{3}$.

2. Ломаная OCA:

$$\int\limits_{OCA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_{OC} 2xydx + (x^2+y^2)dy + \int\limits_{CA} 2xydx + (x^2+y^2)dy.$$

$$\int\limits_{OC} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \left|x = 0, dx = 0, 0 \le y \le 4\right| = \int\limits_0^4 y^2dy = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

$$\int\limits_{CA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \left|y = 4, dy = 0, 0 \le x \le 2\right| = \int\limits_0^2 8xdx = 16.$$

Окончательно, $I_2 = \int\limits_{OCA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = 37\frac{1}{3}$.

3.Прямолинейный отрезок OA:Здесь $y=2x$, поэтому

$$\int_{OA} 2xydx+(x^2+y^2)dy=\int_0^2 \left(2x\cdot 2x\cdot 1+(x^2+4x^2)\cdot 2\right)dx=\int_0^2 14x^2dx=\frac{112}{3}=37\frac{1}{3}.$$

4.Парабола ODA: Уравнение данной параболы имеет вид $x=ky^2$, значение коэффициента k найдём, подставляя в это уравнение координаты точки А: $2 = k{\cdot}4^2$значит k=1/8. Уравнение параболы: $x=\frac{1}{8}y^2$; $x'_y=\frac{1}{4}y$, поэтому

$$\int_{OEA} 2xydx+(x^2+y^2)dy=\int_0^4\left[\left(2\cdot\frac{y^2}{8}\cdot y\right)\cdot\frac{y}{4}+\left(\frac{y^4}{64}+y^2\right)\right]dy=\int_0^4\left(\frac{5y^4}{64}+y^2\right)dy=37\frac{1}{3}.$$

5. Парабола OEA: Совершенно также убеждаемся, что интеграл по параболе ODA имеет то же значение. ▲

В рассмотренном примере интеграл по параболам ODA и OEA одинаков. Но следующий пример показывает, что вообще говоря, это не верно.

Пример: Вычислить $\int_L 2xydx+(x^2+y^2)dy$.

$$\Delta\ I_1=\int_{OBA} 2xydx-(x^2+y^2)dy=-\int_0^4 (2^2+y^2)dy=-37\frac{1}{3};$$

$$I_2=\int_{OCA} 2xydx+(x^2-y^2)dy=\int_0^4 y^2dy-\int_0^2 8xdx=\frac{64}{3}-16=5\frac{1}{3}\neq I_1.\ ▲$$

Напомним, что множество точек (на прямой, на плоскости, в пространстве) называется ***связным***, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Определение: *Область (на плоскости, в пространстве) называется односвязной, если любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не выходя при этом за пределы области.*

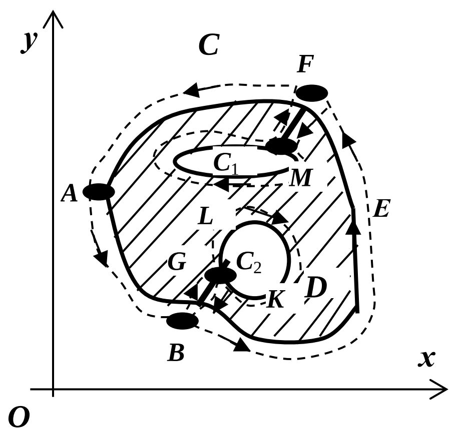
Теорема (Грина): *Если функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные в замкнутой односвязной области D, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной кусочно-гладким контуром C, то*

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (13)$$

при этом контур C обходится так, что область D остаётся слева

Формула (13) называется формулой Грина [7].

3. Теорема Грина для многосвязной области



Пусть на плоскости Oxy дана многосвязная область D с границей Γ. На множестве $\overline{D} = D \cup \Gamma$ определены непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные. Тогда

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

, при этом каждая часть полной границы Γ обходится так, что область D остаётся слева.

Если в некоторой области D выполнены условия теоремы Грина, то равносильны следующие утверждения.

1. $\oint_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$ если L – любой замкнутый контур L, расположенный в области D.
2. Интеграл $\oint_{C} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B, где $L_{AB} \in D$.
3. $Pdx + Qdy = du(x,y),$ где $du(x,y)$ - полный дифференциал функции $u(x,y)$.
4. Во всех точках области D справедливо равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Из формулы Грина следует, что площадь S области D можно также вычислить с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$S_D = \frac{1}{2} \oint_{L} -ydx + xdy,$$

Где интегрирование по контуру L производится в положительном направлении [6].

4. В аудитории

1. Доказать, что

1.1. $\int_{L} (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy = 0$

Если L – замкнутая линия, симметричная относительно начала координат.

1.2. численное значение интеграла

$$\int_{L} (2xy - y)dx + x^2 dy$$

Где L – замкнутый контур, равно площади области, ограниченной этим контуром.

2. Вычислить криволинейный интеграл:

2.1. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$,где L – первая арка циклоиды $x = a\big(t - sin(t)\big), y = a(1 - \cos(t)), a > 0$.

2.2. $\int\limits_L \frac{1}{x-y}dl$,еслиL – отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$,заключенный между точками A(0,-2) иB(4,0).

5. Задачи для самостоятельной работы

1. Доказать, что численное значение интеграла равно площади, ограниченной этим контуром:

1.1. $\int_{L_{OB}} xy^2dx + yz^2dy - x^2zdz$, где L $_{OB}$ – отрезок прямой OB; O(0,0,0); B(-2, 4, 5);

1.2. $\int_{L_{OA}} xydx + (y - x)dy$, где L_{OA} – дуга параболы $y^2 = x$ от точки O(0,0) до точки A(1,1);

1.3. $\int_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, где L_{AB} – отрезок прямой AB; A(1,1,1); B(2,3,4);

Занятие 7-8. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

1. Определение поверхностного интеграла первого рода

Пусть $f(x, y, z)$ – непрерывная функция в точках некоторой гладкой поверхности $\sigma \in \mathbf{R}^3$. Разобьём поверхность на $\boldsymbol{n}$ частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{\boldsymbol{i}}, \ldots \sigma_{\boldsymbol{n}}$, на каждой из частей $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ выберем произвольную точку $\boldsymbol{M_i}(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{z_i})$, найдём $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M_i}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{z_i})$ и площадь части $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ (которую будем обозначать тем же символом $\sigma_{\boldsymbol{i}}$), и составим интегральную сумму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \sigma_i$..

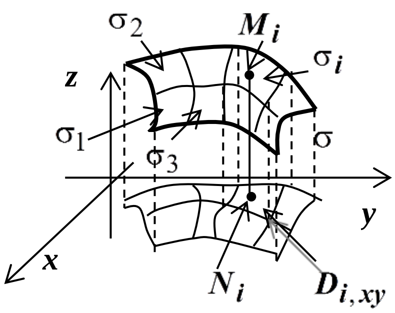
Определение: *Поверхностным интегралом первого рода называется предел интегральной суммы при условии, что* $\max\limits_{\boldsymbol{i}=1,2,\ldots \boldsymbol{n}} \operatorname{diam} \sigma_{\boldsymbol{i}} \to 0$:

$$\lim_{\max\limits_{\boldsymbol{i}=1,2,\ldots \boldsymbol{n}} \operatorname{diam} \sigma_{\boldsymbol{i}} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \sigma_i = \iint_{\sigma} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{d}\sigma .$$

Теорема существования. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности σ, то она интегрируема по этой поверхности.

Выражение поверхностного интеграла через двойной интеграл по проекции поверхности на координатную плоскость

Пусть поверхность σ взаимно однозначно проецируется в область D_{xy} на плоскости $0xy$. Будем считать, что поверхность задана уравнением $z = F(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$. В интегральной сумме $\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \sigma_i$ выразим площадь $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ через двойной интеграл по её проекции $D_{i,xy}$ на плоскость $\boldsymbol{Oxy}$:



$\sigma_i = \iint\limits_{D_{i,xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$. Применим к этому интегралу теорему о среднем:

существует точка $N_i(x_i, y_i) \in D_{i,xy}$ такая, что $\sigma_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}(N_i) \cdot S(D_{i,xy})$. Значение подынтегральной функции $f(x, y, z)$ будем вычислять в точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, такой, что $z_i = F(x_i, y_i)$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, F(x_i, y_i)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}((x_i, y_i)) \cdot S(D_{i,xy})$.

Слева стоит интегральная сумма для поверхностного интеграла, справа - для двойного; переход к пределу при $\max\limits_{i=1,2,\ldots n} \operatorname{diam} \sigma_i \to 0$ (при этом и $\max\limits_{i=1,2,\ldots n} \operatorname{diam} D_{i,xy} \to 0$) даёт

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x,y,F(x,y))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\cdot dxdy\,.$$

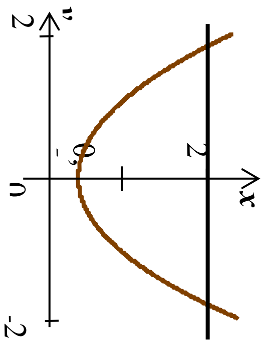
Эта формула и применяется для вычисления поверхностных интегралов.

Естественно, в каждой задаче надо выбирать, на какую из координатных плоскостей предпочтительней проецировать поверхность; если проецирование не взаимно однозначно, поверхность разбивается на части, которые проецируются однозначно.

Пример: Найти $\iint_{\sigma}\sqrt{\frac{x}{2x-1}}d\sigma$, где σ - часть цилиндра $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{z}^2=2\boldsymbol{x}$, вырезаемая гиперболоидом $\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=1$ и плоскостью $\boldsymbol{z}=0$ ($\boldsymbol{z}>0$).

Δ Найдем проекцию поверхности σ на плоскость O_{XY}. Исключим из уравнений цилиндра и гиперболоида переменную z:

$\begin{cases} x^2+z^2=2x \\ x^2-y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow 2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^2+1$ - уравнение проекции линии пересечения двух поверхностей на O_{XY}.



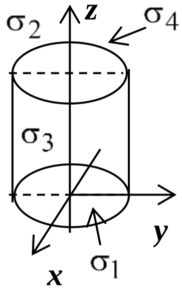
Полагая в уравнении цилиндра $\boldsymbol{z}=0$, получим уравнение линии пересечения цилиндра и плоскости ***OXY***. Таким образом, поверхность σ проецируется в область ***D***, ограниченную параболой $x=\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}^2+1)$ и прямой $\boldsymbol{x}=2$. Часть цилиндра, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{z}>0$, задается уравнением $z=\sqrt{2x-x^2}$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. Таким образом,

$$\iint_{\sigma}\sqrt{\frac{x}{2x-1}}d\sigma=\iint_{D}\sqrt{\frac{x}{2x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dxdy=2\int_{1/2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{2-x}}\cdot\int_{0}^{\sqrt{2x-1}}dy=2\int_{1/2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2-x}}=4\sqrt{2-x}\Big|_{2}^{1/2}=4\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

▲

2. Найти $\iint_{\sigma} z|xy|d\sigma$, где σ - полная поверхность цилиндра $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=1$, $0\le z\le 1$.



Δ Искомый интеграл равен сумме трех интегралов: по нижнему и верхнему основаниям σ_1 и σ_2 и боковой поверхности (см. рис).

Так как на нижнем основании z=0, то $\iint\limits_{\sigma_1} z|xy|d\sigma=0$. Для верхнего основания σ_2

имеем $z(x,y)=1$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, поэтому поверхностный интеграл по σ_2 совпадает

с двойным интегралом от функции $z(x,y)|xy| = |xy|$, взятым по кругу $D=\{x^2+$

$y^2<1\}$: $\iint\limits_{\sigma_2} z|xy|d\sigma=\iint\limits_{D}|xy|dxdy=4\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\cdot\int\limits_0^1 r^3dr=4\dfrac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}\cdot\dfrac{r^4}{4}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2}$. ▲

Найдем интеграл по боковой поверхности. Она состоит из двух частей: σ_3 и σ_4 , симметричных относительно плоскости OYZ. Так как функция $z|xy|$ - четная по x, то интегралы по σ_3 и σ_4 равны.

Проекция σ_3 на плоскость OYZ - прямоугольник D: $\{-1\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$.

Уравнение σ_3 : $x=\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Отсюда:

$$\iint\limits_{\sigma_3\cup\sigma_4} z|xy|d\sigma=2\iint\limits_{D} z|y|\sqrt{1-y^2}\,\frac{dydz}{\sqrt{1-y^2}}=\int\limits_0^1 4zdz\cdot\int\limits_0^1 ydy=1.$$

Окончательно получаем: $\iint\limits_{\sigma} z|xy|d\sigma=0+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$.

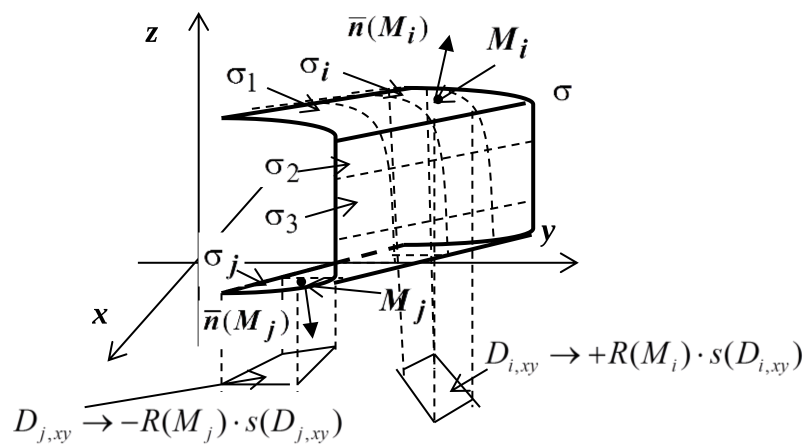
3. Найти $\iint\limits_{\sigma} x^2 d\sigma$, где σ - сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Δ Использование соображений симметрии позволяет иногда существенно упростить вычисление интегралов. Очевидно, что для сферы $\iint\limits_{\sigma} x^2d\sigma=\iint\limits_{\sigma} y^2d\sigma=\iint\limits_{\sigma} z^2d\sigma$. Тогда

$$\iint\limits_{\sigma} x^2d\sigma=\frac{1}{3}\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)d\sigma=\frac{1}{3}R^2\iint\limits_{\sigma}d\sigma=\frac{4\pi R^4}{3}.\ ▲$$

2. Поверхностный интеграл второго рода

Определение поверхностного интеграла второго рода. Пусть в пространстве переменных x,y,z



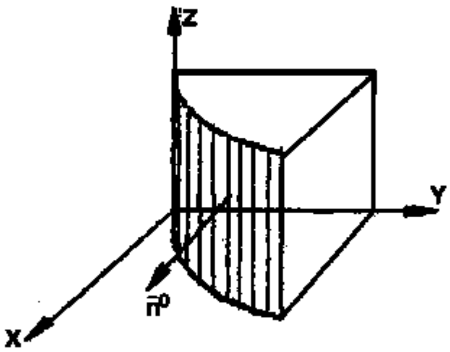
задана ограниченная кусочно-гладкая двусторонняя поверхность σ, на которой введена ориентация (т.е. с помощью единичного вектора нормали в какой-либо точке σ задана сторона поверхности), и на которой определена функция R(x,y,z). Разобьём поверхность на n частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_i, \ldots \sigma_n$, на каждой из частей σ_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, найдём $R(M_i) = R(x_i, y_i, z_i)$, нормаль $\bar{n}(M_i)$ в точке M_i к выбранной стороне поверхности, и площадь $s(D_{i,xy})$ проекции части σ_i на плоскость OXY. В интегральную сумму слагаемое $R(M_i) \cdot s(D_{i,xy})$ возьмём со знаком "+", если $\cos\gamma \geq 0$ (т.е. если угол γ между $\bar{n}(M_i)$ и осью Oz - острый; проекция $\bar{n}(M)$ на орт $\bar{\boldsymbol{k}}$ оси Oz положительна), и со знаком "-", если $\cos\gamma < 0$. В результате интегральная сумма будет иметь вид $\sum\limits_{i=1}^{n} \pm \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M_i}) \cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i,xy}})$. Если существует предел последовательности интегральных сумм при $\max\limits_{i=1,2,\ldots n} \operatorname{diam} \sigma_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения поверхности σ на части σ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, ни от выбора точек M_i, то функция R(x,y,z) называется интегрируемой по поверхности σ, а значение этого предела называется поверхностным интегралом второго рода, или поверхностным интегралом по координатам x,y, и обозначается $\iint\limits_{\sigma} R(M) \cdot dxdy$.

Теорема существования. *Если функция R(x,y,z) непрерывна на поверхности σ, то она интегрируема по этой поверхности.*

Если на поверхности σ, вместе с функцией R(x,y,z), определены функции P(x,y,z) и Q(x,y,z), то, так же, как и интеграл $\iint\limits_{\sigma} R(M) \cdot dxdy$, определяются интегралы $\iint\limits_{\sigma} P(M) \cdot dydz$ и $\iint\limits_{\sigma} Q(M) \cdot dxdz$; в приложениях, как мы видели из рассмотренной в начале раздела физической задачи, обычно рассматривается сумма этих интегралов, которая обозначается $\iint\limits_{\sigma} P(M) \cdot dydz + Q(M) \cdot dxdz + R(M) \cdot dxdy$.

Примеры: Вычислить

$I = \iint\limits_{\sigma} (x+z)dydz + (8y - x)dxdz + (2x^2 - y)dxdy$, σ - часть поверхности цилиндра y = $\dfrac{x^2}{4}$, заключенная между



плоскостями x=0, x=8, z=0, z=3. Сторона поверхности выбирается так, чтобы нормаль образовывала острый угол с осью Ox.

Δ Определяем знаки направляющих косинусов нормали cosα>0, cosβ<0, cosγ=0. Поэтому

$I=\iint\limits_{\sigma}(x+z)dydz+(8y-x)dxdz+(2x^2-y)dxdy==\iint\limits_{D_{yz}}(x(y,z)+z)dydz-\iint\limits_{D_{xz}}(8y(x,z)-x)dxdz$, где

Dyz={(y,z): 0≤ y ≤16, 0 ≤ z ≤ 3}, Dxz={(x,z): 0 ≤ x ≤ 8, 0 ≤ z ≤ 3} - проекции σ на плоскости Oyz и Oxz соответственно. Проекция поверхности σ на плоскость Oxy вырождается в линию - параболу y=$\frac{x^2}{4}$, cosγ=0, поэтому интеграл по Dxy в данном случае отсутствует. Вычислим отдельно интегралы по Dyz и Dxz , выражая x(y,z) и y(x,z) из уравнения поверхности σ: x(y,z)=2$\sqrt{\boldsymbol{y}}$, y(x,z)=$\frac{\boldsymbol{x}^2}{4}$.

$\iint\limits_{D_{yz}}(x(y,z)+z)dydz=\iint\limits_{D_{yz}}(2\sqrt{y}+z)dydz=\int\limits_0^3 dz\int\limits_0^{16}(2\sqrt{y}+z)$ dy=328, $\iint\limits_{D_{xz}}(8y(x,z)-x)dxdz=\iint\limits_{D_{xz}}(2x^2-x)dxdz$

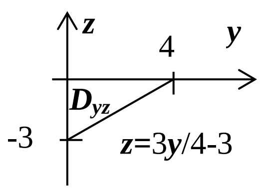
$=\int\limits_0^3 dz\int\limits_0^8(2x^2-x)$ dx=928. Окончательно I = 328 - 928 = - 600. ▲

Пример: Вычислить $I=\iint\limits_{\sigma}3xdydz+zdxdz+5ydxdy$, где σ - часть плоскости $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-4\boldsymbol{z}=12$, ограниченная координатными плоскостями x=0, y=0, z=0. Сторона поверхности выбирается так, чтобы нормаль образовывала острый угол с осью Oz.

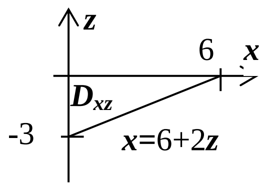
Δ Из двух направлений нормали кσ $\bar{n}=\pm\frac{2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}}{\sqrt{4+9+16}}$ мы должны выбрать такое, для которого коэффициент при орте $\bar{k}$ (т.е. $\cos\gamma$) положителен, поэтому выбираем знак "-", тогда $\bar{n}=\frac{-2\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}}{\sqrt{29}}$. В соответствии со знаками направляющих косинусов,

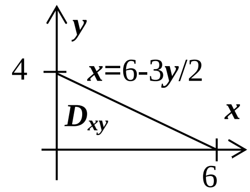
$I=\iint\limits_{\sigma}3xdydz+zdxdz+5ydxdy=-\iint\limits_{D_{yz}}3x(y,z)dydz-\iint\limits_{D_{xz}}zdxdz+\iint\limits_{D_{xy}}5ydxdy$. Вычисляем эти интегралы.

1. $-3\iint\limits_{D_{yz}}x(y,z)dydz=|\,x=6-3y/2+2z\,|=-3\iint\limits_{D_{yz}}\left(6-\frac{3y}{2}+2z\right)dydz=$



$$= -3\int_0^4 dy \int_{\frac{3}{4}y-3}^{0}\left(6-\frac{3}{2}y+2z\right)dz = -3\int_0^4\left(\frac{9}{16}y^2-\frac{9}{2}y+9\right)dy = -3(12-36+36) = -36$$
.





2. $-\iint\limits_{D_{xz}} z\,dx\,dz = -\int_{-3}^{0} z\,dz \int_0^{6+2z} dx = -\int_{-3}^{0}(6+2z)z\,dz = 27-18 = 9$.

3. $5\iint\limits_{D_{xy}} y\,dx\,dy = 5\int_0^4 y\,dy \int_0^{6-\frac{3}{2}y} dx = 5\int_0^4\left(6-\frac{3}{2}y\right)y\,dy =$

$= 5(48-32) = 80$. Окончательно, $\boldsymbol{I} = -36+9+80 = 53.$ ▲

Вычисление поверхностного интеграла второго рода всегда можно свести к вычислению поверхностного интеграла первого рода. Так, в последнем примере подынтегральное выражение равно $\left(\bar{v}(M)\cdot\bar{n}(M)\right)d\sigma$, где $\bar{v}(M) = 3x\bar{i}+z\bar{j}+5y\bar{k}$,

$\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M}) = \cos\alpha\bar{\boldsymbol{i}}+\cos\beta\bar{\boldsymbol{j}}+\cos\gamma\bar{\boldsymbol{k}} = \dfrac{-2\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}}{\sqrt{29}}$. Поэтому $\bar{v}(M)\cdot\bar{n}(M) = \dfrac{-6x-3z+20y}{\sqrt{29}}$, и,

проектируя σ на плоскость Oxy $\left(d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \dfrac{\sqrt{29}}{4}dxdy\right)$, получим

$$I = \iint\limits_{\sigma} 3xdydz + zdxdz + 5ydxdy = \iint\limits_{\sigma}\frac{-6x-3z+20y}{\sqrt{29}}d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}}\frac{-6x-3z+20y}{\sqrt{29}}\cdot\frac{\sqrt{29}}{4}\bigg|_{z=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-3} dxdy =$$

$$= \frac{1}{4}\iint\limits_{D_{xy}}\left(-\frac{15}{2}x+\frac{71}{4}y+9\right)dxdy = \frac{1}{4}\int_0^6 dx\int_0^{4-\frac{2}{3}x}\left(-\frac{15}{2}x+\frac{71}{4}y+9\right)dy = \frac{1}{4}\int_0^6\left(\frac{161}{18}x^2-\frac{250}{3}x+178\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(644-1500+1068\right) = \frac{212}{5} = 53$$
.

3. В аудитории

Вычислить $\int_L \dfrac{dl}{x+2y+5}$, где L – отрезок прямой y=2x-2, заключенный между точками A(0,-2), B(1,0).

Занятие 9-10.

РЯДЫ.

Ряды представляют простой и весьма совершенный инструментматематического анализа для приближенного вычисления функций, интегралов и решений дифференциальных уравнений.

1. Числовые ряды. Пусть u_1 , u_2 , … u_n – бесконечная последовательность чисел.

Определение: *Числовым рядом называется выражение*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1)$$

где числа u_1 , u_2 , … называются членами ряда, u_n – общий член ряда.

Будем считать ряд заданным, если известен общий член ряда u_n, как функция его номера n.

Пример: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$— числовой ряд,а общий член ряда здесь 1/n.

Пример: Найти общий член ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} \ldots$$

Последовательные числители образуют арифметическую прогрессию 1,3, 5, 7, …; n-й член прогрессии находим по формуле $a_n = a_1 + d\,(n-1)$.

Здесь $a_1 = 1$, d=2, поэтому $a_n = 2n-1$. Последовательные знаменатели образуют геометрическую прогрессию 2, 2^2, 2^3, 2^4, …; n-й член этой прогрессии $b_n = 2^n$.Следовательно, общий член ряда $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

Пример: Дан общий член ряда

$$u_n = \frac{n}{10^n + 1}.$$

Написать первые четыре члена ряда.

Δ Если n=1, то $u_1 = \frac{1}{11}$, если n=2, то $u_2 = \frac{2}{101}$, если n=3, то $u_3 = \frac{3}{1001}$, если n=4, то $u_4 = \frac{4}{10001}$.▲

Определение: *Сумма n первых членов ряда называется n-й частичной суммой и обозначается $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.*

Пример: Найти частичную сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \cdots$$

Δ Общий член ряда можно представить в следующем виде

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

откуда

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right), u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right), u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right), u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right), \ldots$$

Следовательно,

$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$. ▲

Определение: *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется сходящимся, если последовательность $\{S_n\}$ его частичным сумм имеет конечный предел S, т.е. $lim_{n\to\infty}S_n=S$. В противном случае (если предел не существует или бесконечен) ряд расходится.*

Отметим, что в большинстве случаев найти сумму ряда достаточно непросто, для этого используются солидные теоретические выкладки и специальные методы. Однако среди бесконечного множества числовых рядов есть те немногочисленные представители, для которых найти сумму возможно.

Пример: Найти сумму ряда для бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

Δ В данном случае сумма легко рассчитывается по известной школьной формуле $S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$.▲

Пример: Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Δ Представляя общий член ряда в виде суммы простейших дробей (предлагаем читателям проделать подробные выкладки самостоятельно), приходим к результату$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$;следовательно, ряд сходится и имеет сумму 1/4. ▲

Замечание: ***Расходящийся ряд суммы не имеет!***

Определение: *Если все члены ряда являются положительными числами, то ряд называется числовым знакоположительным.*

Такие ряды исследуются на сходимость по необходимому и достаточным признакам.

Теорема 1 (*Необходимый признак сходимости ряда*): *если числовой ряд (1) сходится, то*

$$lim_{n\to\infty}u_n=0. \qquad (2)$$

Замечание: ***Обратное утверждение неверно!***

Пример: Доказать, что ряд$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Δ Так как $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$при k=1,2,…n, то $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, откуда следует, что

$S_n \to \infty$при $n_n \to \infty$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Таким образом, несмотря на то, что условие (2) для этого ряда выполнено, ряд расходится. ▲

Теорема 2(<u>*достаточный признак расходимости ряда*</u>): *Если* $\lim_{n\to\infty} u_n = a \neq 0$,

то ряд (1) расходится.

Пример: Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{3n-1} + \cdots$$

Δ Т.к. предел n-го члена ряда не равен нулю, то ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости).▲

Замечание: Сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нем отбросить любое конечное число членов. Но его сумма, если она существует, при этом изменяется.

Теорема 3 (<u>*признаки сравнения*</u>):

Первый признак сравнения.

Если даны два ряда

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \qquad (3)$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \qquad (4)$$

и для всех $n \geq n_0$ *выполняются неравенства* $0 < u_{n_0} \leq u_n$, *то:*

1) из сходимости ряда (4) следует сходимость ряда (3)

2) из расходимости ряда (3) следует расходимость ряда (4)

Это признак остается в силе, если неравенства $u_n < v_n$выполняются не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера n=N.

Второй признак сравнения.

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k,$$

то ряды (3), (4) сходятся или расходятся одновременно.

Замечание: ***В качестве рядов для сравнения целесообразно выбирать либо сходящийся ряд – бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, либо расходящийся гармонический ряд.***

Пример: Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 3^n}+\cdots$$

Δ Для установления сходимости данного ряда воспользуемся неравенством

$$u_n=\frac{1}{n\cdot 3^n}<\frac{1}{3^n}\quad (n\ \geq 2)$$

И сравним данный ряд со сходящимся рядом (бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, q=1/3<1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

Согласно признаку сравнения (теорема 3) исходный ряд сходится. ▲

Пример: Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

Δ Т.к.$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}>\frac{1}{n}$для любого n$\geq 2$, то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда, который, как известно, расходится. Значит, исходный ряд расходится. ▲

Теорема 4 (*<u>признак Д'Аломбера</u>*):*Если для знакоположительного ряда (1) существует предел*

$$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=k,\text{ то если}\begin{cases}<1,\text{ряд сходится,}\\>1,\text{ряд расходится,}\\=1,\text{следует применить другой достаточный признак}\end{cases}$$

Пример: Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}$$

Δ Применим признак Д'Аломбера, поскольку $u_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}, u_{n+1} = \frac{n^2}{2^{n-1}}$,то

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n-1}}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$,следовательно данный ряд сходится. ▲

Пример: Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \cdots + \frac{2^n}{n^{10}} + \ldots$$

Δ Применим признак Д'Аломбера, имеем $u_n = \frac{2^n}{n^{10}}, u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$, значит

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n^{10}}{(n+1)^{10}} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}} = 2 > 1$,следовательно данный ряд расходится. ▲

Теорема 5(<u>*радикальный признак Коши*</u>)*: Если для знакоположительного ряда (1) существует предел*

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q, \textit{то если} \begin{cases} < 1, \text{ряд сходится}, \\ > 1, \text{ряд расходится}, \\ = 1, \text{следует применить другой достаточный признак} \end{cases}$$

Пример: Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n$$

Δ Воспользуемся радикальным признаком Коши

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{8n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{8-1/n} = \frac{1}{8} < 1$,следовательно ряд сходится. ▲

Пример: Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Δ Снова применим радикальным признаком Коши

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$,следовательно ряд расходится. ▲

Теорема 6(<u>*интегральный признак Коши*</u>)*:Пусть члены ряда (1) монотонно убывают и функция y=f(x), непрерывная при* $x \geq a \geq 1$*, такова, что f(n)=*u_n*. Тогда ряд (1) и интеграл* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *одновременно сходятся или расходятся.*

Например, поскольку $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \leq 1$, то *ряд Дирихле* -$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Замечание: Сходимость многих рядов можно исследовать путем сравнения с соответствующим рядом Дирихле.

Пример: Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^3}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Δ Применим интегральный признак: $u_n=\frac{1}{n^2}$, следовательно, $f(x)=\frac{1}{x^2}$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1.$$

Интеграл сходится (является конечной величиной), поэтому сходится и данный ряд.▲

Пример: Исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

на сходимость.

Δ Так же применим интегральный признак Коши

$u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, далее предлагаем читателя самим убедиться, что $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \infty$. В силу расходимости интеграла, расходится и данный ряд.▲

Определение: *Числовым знакочередующимся рядом называется ряд, в котором за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным членом положительный.*

Т.е. ряд имеет вид

$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n-\cdots=\sum_{n=1}^\infty(-1)^n u_n$, где $u_n>0$.(5)

Числовые знакочередующиеся ряды исследуются на сходимость по признаку Лейбница.

Теорема 7(<u>*признак Лейбница*</u>)*:если*

1) знаки у членов ряда чередуются;

2) члены ряда убывают по абсолютной величине;

3) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$*,, то числовой знакочередующийся ряд (5) сходится, и его сумма заключена в пределах* $0<S<u_1$.

Пример: Исследовать ряд$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ на сходимость.

Δ Применим признак Лейбница.

1) Ряд знакочередующийся.
2) Так как $\frac{2}{2^2+1} = \frac{1}{2+1/2}, \frac{3}{3^2+1} = \frac{1}{3+1/3}, \frac{4}{4^2+1} = \frac{1}{4+1/4}, \dots,$

то$\frac{1}{2} > \frac{1}{2+1/2} > \frac{1}{3+1/3} > \frac{1}{4+1/4} > \cdots$и следовательно члены ряда убывают по абсолютной величине.

3) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1/n} = 0$.

Все условия признака Лейбница выполнены, следовательно, ряд сходится.▲

Пример: Исследовать сходимость ряда

$$1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 - \ldots + (-1)^{n-1}[1+(0{,}1)^n] + \ldots .$$

ΔПервое и второе условие признака Лейбница выполняется, с другой стороны $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right) = 1$ не выполнен необходимый признак сходимости ряда. Ряд расходится.▲

Остановимся на некоторых свойствах знакопеременных рядов.

Определение: *К знакопеременным рядам относятся знакочередующиеся ряды и ряды с произвольным чередованием знаков своих членов.*

Рассмотрим <u>знакопеременный</u> ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (6)$$

Если ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|. \qquad (7)$$

сходится, то ряд (7) так же сходится и называется <u>абсолютно сходящимся</u>. Если ряд (7) расходится, а ряд (6) сходится, то ряд (6) называется <u>условно (неабсолютно) сходящимся</u>.

Замечание: При исследовании ряда на абсолютную сходимость используются признаки сходимости с положительными членами.

Пример: Исследовать ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\cdots.$$

∆ Составим ряд из абсолютных величин:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots.$$

Этот ряд есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и, следовательно, сходится. Значит, и данный ряд сходится, причем абсолютно. ▲

Пример: Исследовать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

∆ Данный ряд сходится, потому что выполнены условия признака Лейбница, кроме того, он сходится условно, т.к. ряд, составленный из абсолютных величин

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

расходится. ▲

2. В аудитории

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 1.2$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ 1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+21n-8}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n+1}$; 2.2.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$; 2.3.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{2^n}$;

3. Спомощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}$; 3.2.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}$;

4. Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряды:

4.1.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 4.2.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\cdot2^{-n}$; 4.3.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2-9}$.

3. Задачи для самостоятельной работы

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$; 1.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{7n-4}{n^3+n^2-2n}$; 1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

1.4.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4n^2+5}$;1.5$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^n-1}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

2.1.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$; 2.2.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+4)^2}$; 2.3.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+1)}{5^n}$; 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

3. Спомощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$; 3.2.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,ln\frac{n+1}{n-1}$;3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{36+n^2}$; 3.4.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$;

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$.

4. Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряды:

4.1.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n+5}$;; 4.2.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$;4.3.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$; 4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$; 4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$.

Занятие 11.

1. Функциональные ряды и последовательности.

<u>Последовательности.</u>

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$.

Определение: *Говорят что последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на Е по точкам, если* $\forall x \in E \ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, *т.е.*

$$f_n(x) \to f(x) \leftrightarrow \forall x \in E \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x): \ \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение: *Говорят, что последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$, т.е.* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *если*

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *сразу для* $\forall x \in E$.

Пример: Проверить сходимость последовательности $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$, $x \in [0, 1) = X$.

Δ Понятно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, т.е. последовательность сходится. Однако эта сходимость будет неравномерной. Действительно, возьмем $\varepsilon = 0{,}5$. Найдется ли такое, что для и $x \in [0, 1)$ выполняется неравенство $|x^n - 0| < \frac{1}{2}$? Выполнение этого неравенства для всех точек $x \in [0,1)$ невозможно, так как при x близких к 1 $|x^n| > \frac{1}{2}$, потому что $\lim\limits_{x\to 1-0} x^n = 1$. Таким образом, последовательность сходится, но неравномерно. ▲

Теорема 1: *Обозначим* $R_n = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. *Тогда* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на Е тогда и только тогда, когда* $R_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство:

1. Пусть $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$: для $\forall n > N$ будет $|f_n(x) - f(x)| \le \sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ сразу для $\forall x \in E$, т.е. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

2. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Тогда $\exists N = N(\varepsilon)$: при $\forall n > N$ и сразу при $\forall x \in E$ буде $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $0 < R_n = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, что равносильно тому, что $\forall f_n(x)$ лежат в ε-полоске вокруг $f(x)$.

Пример: Сходится ли равномерно последовательность $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $x \in [0, +\infty) = X$.

Δ Сначала проверим существование предельной функции .

$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2} \to 0$ при $n \to \infty$, $\forall x \in X$. Таким образом, $f(x) = 0$. Рассмотрим

$$\alpha_n = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \left| \frac{x}{1 + nx^2} - 0 \right| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \frac{x}{1 + nx^2} = \sup\limits_{X} r_n(x),$$

где $r_n=\frac{x}{1+nx^2}$. Найдем , т.е. наибольшее значение $r_n(x)$ на . Вычислим значения r_n на концах интервала $r_n(0)=0$ и $r_n(x\to\infty)=0$

и в критических точках. Продифференцируем: $\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)'=\frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2}=\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$.

$r_n'=0$ при $1-nx^2=0$, откуда $x=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$.

При этом берем только $x=\frac{1}{\sqrt{n}}\in[0,+\infty)$. Тогда $r_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Поэтому $\alpha_n=\frac{1}{2\sqrt{n}}\to 0$ при . Следовательно, $f_n(x)\to 0$ при на $[0,+\infty)$. Последовательность равномерно сходится на . ▲

Пусть на множестве E задан ряд $\sum a_k(x)$. Говорят, что $\sum a_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$ на E $\left(\sum a_k(x)\overset{E}{\rightrightarrows}S(x)\right)$, если $S_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows}S(x)$, т.е. для $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)$: для $\forall n>N$ будет $|S(x)-S_n(x)|=\sum_{n+1}^{\infty}a_k(x)<\varepsilon$ сразу для $\forall x\in E$. ■

Простейшие свойства:

1. Если $f_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows}f(x),\ g_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows}g(x)$, то $f_n(x)\pm g_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows}f(x)\pm g(x)$.

(Следует из того, что $|f(x)\pm g(x)-(f_n(x)\pm g_n(x))|\le|f(x)-f_n(x)|+|g(x)-g_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ для - $\forall n>N(\varepsilon)$ и $\forall x\in E$)

2. Если $f_n(x)\overset{E}{\rightrightarrows}f(x)$ и $\varphi(x)<M=\text{const}$, то $f_n(x)\cdot\varphi(x)\overset{E}{\rightrightarrows}f(x)\cdot\varphi(x)$.

□Возьмём $\forall\varepsilon>0$. Тогда $\exists N=N(\varepsilon)$: для $\forall n>N$ и $\forall x\in E$ будет $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$. Тогда для $\forall n>N$ и $\forall x\in E$ будет $|f_n(x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi(x)|=|\varphi(x)|\cdot|f_n(x)-f(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$, т.е. $f_n(x)\cdot\varphi(x)\overset{E}{\rightrightarrows}f(x)\cdot\varphi(x)$.■

Ряды.

Определение: *Ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (1)$$

члены которого есть функции от x, называется функциональным.

Пример: $-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}+\ldots,\ \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots(-1)^{n-1}-\frac{x^n}{n}+\ldots,$

Придавая независимой переменной x некоторое значение x_0 и подставляя это значение в функциональный ряд (1), получим числовой ряд

$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$.

Определение: *Совокупность значений x, при которых функции $u_1(x), u_2(x),\dots,u_n(x),\dots$ определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется областью сходимости функционального ряда.*

Каждому значению из области сходимости соответствует определенное значение величины $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} u_n(x)$.

Пример: Дан функциональный ряд

$$\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\dots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n+\cdots$$

Исследовать ряд на сходимость в точках x=0 и x=1.

Δ В точке x=0 получаем ряд

$$2+\frac{1}{3}2^2+\frac{1}{5}2^3+\dots+\frac{1}{2n-1}2^n+\cdots$$

Применим признак Д’Аломбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)}{(2n+1)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n-1/n}{n+1/n}=2>1,$$

Следовательно, ряд расходится.

В точке x=1 получаем ряд

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\dots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots$$

Так же применяя признак Д’Аломбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)}{(2n+1)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n-1/n}{n+1/n}=\frac{1}{3}<1,$$

ряд сходится.▲

Пример: Найти область сходимости ряда

$$\sin(x)+\sin^2(x)+\sin^3(x)+\cdots\sin^n(x)+\cdots.$$

Δ Члены ряда определены на всей числовой прямой и образуют геометрическую прогрессию с $q = sin\, x$. Поэтому ряд сходится, если $|q|=|\sin(x)|<1$, и расходится, если $|q|=|\sin(x)|=1$, т.к. (значения $|q|=|\sin(x)|>1$ невозможны). Но $\sin(x)=\pm 1$при значениях $x=\pm\frac{\pi k}{2}\,(k=1,3,5,\dots)$и $|q|=|\sin(x)|<1$ при остальных значениях x. Следовательно, ряд сходится при всех значениях x, кроме

$x = \pm\frac{\pi k}{2}\,(k = 1,3,5,\dots)$. Областью его сходимости служит вся числовая прямая, за исключением этих точек. ▲

Определение: *Величину* $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} u_n(x)$, *являющуюся функцией от x, есть сумма функционального ряда, т.е.*

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} u_n(x).$$

Представим сумму ряда в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где

$S_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\dots+u_n(x)$, $R_n(x) = u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots$

Определение 6: *Сумму* $R_n(x)$ *называют остатком функционального ряда.*

Критерий Коши:

Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходился в некоторой области сходимости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N, \forall p: \mathrm{n, N, p} \in \boldsymbol{N} \text{ и } \forall x\in E: |R_n(x)| < \varepsilon.$$

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса:

Если функции $u_1(x), u_2(x),\dots,u_n(x)\dots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области сходимости положительных чисел $a_1, a_2,\dots,a_n$, т.е. причем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в этой области сходится равномерно.

Сформулируем две теоремы, относящиеся к интегрированию и дифференцированию функциональных рядов.

Теорема (о почленном дифференцировании рядов**):** Пусть функции $u_1(x), u_2(x),\dots,u_n(x),\dots$ *определены в некоторой области X и имеют в этой области производные* $u'_1(x), u'_2(x),\dots,u'_n(x),\dots$. *Если в этой области ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ *сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}'_x$$

Пример: Исследовать сходимость ряда

$$\cos(x) + cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + cos\left(\frac{x}{n}\right) + \cdots.$$

Δ Возьмём произвольное значение $x=x_0$. При этом значении получим числовой ряд

$$\cos(x_0) + cos\left(\frac{x_0}{2}\right) + \cdots + cos\left(\frac{x_0}{n}\right) + \cdots.$$

Найдём предел его общего члена $u_n = \cos\frac{x_0}{n}$ при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x_0}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0.$

Следовательно, этот числовой ряд расходится при произвольно выбранном, т.е. при любом значении x. Область его сходимости – пустое множество. ▲

Пример: С помощью признака Вейерштрасса показать, что ряд

$$\sin(x) + \frac{1}{2^2} sin^2(2x) + \frac{1}{3^2} sin^3(3x) \ldots + \frac{1}{n^2} sin^n(nx) + \cdots.$$

Сходится равномерно в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Δ Так как $\left|\frac{1}{n^2} sin^n(nx) \leq \frac{1}{n^2}\right|$ и ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ сходится, то данный ряд сходится равномерно при любых значениях x.▲

В аудитории

1. Дан функциональный ряд

1.1. $\frac{3x+1}{x^2+x+1} + \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n + \cdots$. Сходится ли ряд в точках x=1, x=2, x=3?

1.2. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$. Сходиться ли ряд в точках x = 1 и x = - 1.

2. Найти область сходимости ряда

2.1. $\ln(x) + ln^2(x) + \cdots + ln^n(x) + \cdots$.

2.2. $1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-(n-1)x} + \cdots$.

3. Исследовать сходимость функционального ряда

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x^2-4x+6)^n$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n}$.

4. Показать, что ряд равномерно сходится в указанном промежутке заданном промежутке:

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{x^2+n^2}$ на $(-\infty;+\infty)$.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$ на $(-2;2)$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Дан функциональный ряд

1.1. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$. Сходится ли ряд в точках x=1, x=1/2, x=0?

1.3. . $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(x))^n$. Сходиться ли ряд в точках x = 0 и x = e.

2. Найти область сходимости ряда

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

3. Исследовать сходимость функционального ряда

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2\cdot 3^n}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$

4. Показать, что ряд равномерно сходится в указанном промежутке заданном промежутке:

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ на $[-1;1]$.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ на $(-\infty;+\infty)$.

Занятие 12.

Степенные ряды

Определение: *Степенным рядам называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,$$

где $a_0, a_1, \dots\ a_n, \dots -$*постоянные числа, называемые коэффициентами ряда,* x_0 $-$*фиксированное число.*

Если положить $x_0 = 0$, получаем степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad (1)$$

Теорема 1: (<u>теорема Абеля</u>)

1. Если степенной ряд (1) сходится при некотором значении $x = x_1 \neq 0,$ то он абсолютно сходится при всяком значении x, удовлетворяющем условию $|x| < |x_1|$.

2. Если степенной ряд (1) расходится при некотором значении $x = x_2,$ то он расходится при любых x, для которых $|x| > |x_2|$.

Определение: *Неотрицательное число R, такое, что при всех* $|x| < R$ *степенной ряд (1) сходится, а при всех* $|x| > R$ $-$*расходится, называется радиусом сходимости ряда (1).*

Радиус сходимости вычисляется по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad (2)$$

если, начиная с некоторого $n \geq n_0$, все $a_n \neq 0$.

Замечание: Формулы (2) легко получить, если воспользоваться признаком Д'Аламдера или радикальным признаком Коши соответственно.

Пример: Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3}}$.

Δ Имеем $a_n = \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3}}, a_{n+1} = \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(2n+3)^2\sqrt{3}}$, значит,

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, интервал сходимости ряда $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Выясним поведение ряда на концах интервала сходимости. При x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, он сходится по признаку Лейбница. При x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, он представляет собой обобщенный сходящийся (т.к. α=2>1) гармонический ряд. Таким образом, область сходимости данного ряда $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. ▲

Замечание 2: Следует отметить, что для некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку (R=0), для других – охватывает всю ось Ox (R=∞).

Пример: Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-5)^n$.

Δ Так как $a_n = n!, a_{n+1} = (n+1)!$, значит, $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n(+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Следовательно, ряд сходится только при x- 5=0, т.е. в точке x=5.▲

Пример: Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Δ Имеем $a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}, a_0 = 0$, значит, $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$. Следовательно, ряд расходится при любом значении x. ▲

Теорема 2: (<u>о равномерной сходимости степенного ряда</u>). *Степенной ряд (1) равномерно сходится на любом отрезке* $[\alpha;\ \beta]$ *, содержащимся в интервале сходимости, поэтому его сумма в интервале сходимости является непрерывной функцией.*

Теорема 3: *Степенной ряд (1) можно почленно дифференцировать и интегрировать в интервале сходимости.*

Очевидно, что степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$, полученный дифференцированием ряда (1), имеет тот же интервал сходимости, что и исходный ряд. Предлагаем читателям убедиться в этом самостоятельно.

Пример: Найти сумму ряда

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots.$$

∆ При $|x|<1$ данный ряд сходится (т.к. R=1), значит, его можно почленно дифференцировать в интервале сходимости. Пусть S(x) – сумма ряда, тогда

$$S'(x) \ = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}+\cdots$$

Так как $|x|<1,$ полученный ряд есть сумма членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=x^2$ и его сумма $S'(x)$=$\frac{1}{1-x^2}$. Проинтегрировав ряд их производных, найдем сумму данного ряда:

$S'x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ $(|x|<1)$. ▲

В аудитории

1. Найти область сходимости степенного ряда

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$; 1.2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^n \cdot \sqrt{n+1}}$.

2. Найти область равномерной сходимости следующих рядов:

2.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$; 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$.

3. Применив почленное интегрирование и дифференцирование, найти суммы указанных рядов:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$.

Задания для самостоятельной работы

1. 1. Найти область сходимости степенного ряда

1.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}$.

2. Найти область равномерной сходимости следующих рядов:

2.1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n-1} \cdot x^n}{5^n \cdot \sqrt{n^2-1}}$; 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$;

3. Применив почленное интегрирование и дифференцирование, найти суммы указанных рядов:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$; 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак А.А. Ряды и кратные интегралы. Мн., Изд. БГУ, 1999.

2. Данко. П.Е., Попов А.Г. Кожевникова Т.Я. . Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2ч. – М: Высш. Шк., 1999. – Ч. 2. – 464 с.

3.Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу.- Изд-во: Лань, 2010 -464 с.

4. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.2. – М.: Наука, 1971.

5. Ковалева Л.А., Об одной нелокальной задаче теории функций, Дифференциальные уравнения, 2010, 46(3),С. 396-409

6.Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Учеб. Пособие. В 3 ч. Ч.3/.А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Мн.: Выш. Шк., 2001-288с.

7. Солдатов А.П., Тарасова О.А. Смешанная задача плоской теории упругости в полуплоскости
Научный рецензируемый журнал «Научные ведомости Белгородского государственного университета» Математика. Физика. ISSN 2075-4639 №41

8. Солдатов А.П., Чернова О.В. Задача Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера. Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009. Т.13 № 17-2. С.115.

9. Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа: Учебное пособие для втузов.- 2-е изд./ А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин.-М.:ФИЗМАТЛИТ: Лабаратория Базовых Знаний, 2003.