

Московкин В. М., Билаль Н. Е. Сулейман, Голиков Н. А.

Математическая модель взаимодействия результатов различных видов НИОКР

В статье в рамках линейной концепции инноваций и уравнений популяционной динамики построена и исследована трехмерная модель взаимодействия результатов НИОКР различных видов: фундаментальные статьи — прикладные статьи — патенты на изобретения. При линейных функциях коэффициента роста от фазовых переменных найдены все восемь особых точек построенной динамической системы третьего порядка.

Получено условие для устойчивости нетривиальной особой точки. Аналогичные результаты получены для нелинейных самоограниченных функций коэффициента роста в условиях отсутствия процесса устаревания знаний.

Ключевые слова: *линейная концепция инноваций, уравнения популяционной динамики, фундаментальные статьи, прикладные статьи, патенты на изобретения, динамическая система, линейный анализ устойчивости, особые точки, матрица Якоби*

В данной статье в рамках линейной концепции инноваций и уравнений популяционной динамики будет построена и исследована трехмерная модель взаимодействия результатов НИОКР различных видов: фундаментальные статьи, прикладные статьи, патенты на изобретения.

Аналогия между рассматриваемым линейным инновационным процессом и динамикой популяций состоит в следующем. В популяционной биологии (экологии) под популяцией понимается множество особей определённого вида. Популяции разного типа, состоящие из особей разного вида, могут взаимодействовать между собой различным образом. Существуют взаимодействия типа конкуренции, кооперации, “хищник — жертва”, мутуализма, паразитизма и др. Но все они при взаимодействии n -популяций и постоянности коэффициентов модели описываются уравнениями Лотки-Вольтерра [1].

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left[\alpha_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_j \right]. \quad (1)$$

Тип взаимодействия определяется сочетанием знаков или нулевых значений постоянных коэффициентов модели. Например, если $\alpha_i > 0$, $\gamma_{ij} > 0$, то придём к классической n -мерной модели конкурентных взаимодействий популяций. По аналогии с понятием биологических популяций под “популяциями” инновационного процесса мы будем понимать количества фундаментальных (x_1) и прикладных (x_2) статей, а также патентов (x_3).

Как видно из n -мерной динамической системы (1), саморазвитие на каждом этапе инновационного процесса описывается стандартными логистическими членами ($\alpha_i x_i - \gamma_{ii} x_i^2$) или уравнением Ферхульста $\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i - \gamma_{ii} x_i^2$. Здесь в отсутствие по-

парных взаимодействий $x_i x_j$ ($i \neq j$) процесс саморазвития на каждом i -ом научно-исследовательском этапе выходит на устойчивый стационарный уровень $x_{ist} = \frac{\alpha_i}{\gamma_{ii}}$. В наукометрии (динамика публикаций, патентов на изобретения) и моделях диффузии инноваций использование уравнения Ферхульста является общепризнанным [2, 3]. Попарные взаимодействия (билинейные члены) в уравнениях популяционной динамики (1) интерпретируются вероятностью встреч особей разных видов (формула произведения вероятностей). Аналогично в нашем случае, например, член $\gamma_{21} x_1 x_2$ в динамической системе (1) можно интерпретировать как вероятность встреч комплементарных (взаимодополняемых, подходящих друг другу) фундаментальных и прикладных статей, приводящих к новым прикладным статьям (фундаментальное исследование обогащает новыми знаниями некоторую прикладную работу, что приводит к новому прикладному исследованию).

Уравнения популяционной динамики, так же, как и их аналоги в инновационной и экономической динамике [2, 4], представляют собой систему балансовых уравнений, в которых скорости суммарного роста популяций складываются из скоростей истинного их роста (знак плюс) и убыли (знак минус). Несмотря на некоторую “физичность” этих уравнений (балансовые уравнения) их правые части несут феноменологический характер, так как не выводятся из фундаментальных принципов и законов (особенно это касается экономической динамики). Общепризнанность этих уравнений в биологии и экологии связана с их экспериментальной проверкой русским биологом Г. Гаузе [5], который опытным путём подтвердил математическую модель конкурентных взаимодействий (уравнение

Лотки-Вольтерра). Отметим, что ряд моделей диффузии инновации, связанных с уравнением Ферхульста, также были подтверждены на основе эмпирических данных (работы американских ученых Мэнсфилда, Сагала и др.) [2].

Теперь перейдем к построению вышеуказанной трехмерной модели взаимодействия результатов НИОКР различных видов. В терминах уравнений популяционной динамики и линейной концепции инноваций такая модель предлагается в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(y)x - k_1x - \beta_1x^2 \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x)y - k_2y - \beta_2y^2 \\ \frac{dz}{dt} = f_3(y)z - k_3z - \beta_3z^2, \end{cases} \quad (2)$$

где x — количество опубликованных фундаментальных статей, y — количество опубликованных прикладных статей, z — количество выданных патентов на изобретения, k_i — коэффициент устаревания результатов НИОКР разного вида, β_i — коэффициенты внутривидовой конкуренции результатов НИОКР разного вида, f_i — переменные коэффициенты роста в членах, отвечающих за генерирование результатов НИОКР разного вида.

Предполагается, что в рассматриваемой научно-исследовательской системе ведутся НИОКР естественнонаучного и технического характера, результаты которых хорошо описываются последовательной цепочкой: фундаментальные статьи, прикладные статьи, описания изобретений.

Первый коэффициент роста $f_1(y)$ говорит о том, что скорость генерирования фундаментальных статей зависит от количества прикладных статей. Действительно, при проведении фундаментальных исследований и написании соответствующих статей исследователи берут во внимание накопленное прикладное знание и ссылаются в своих работах на прикладные статьи. Например, ученый в массиве ранее написанных фундаментальных статей (им и другими учеными) встречает прикладную статью (или серию таких статей) и на основе всех этих работ готовит и публикует серию новых фундаментальных статей. Здесь прикладное знание обогащает фундаментальное. То же самое мы имеем во втором уравнении динамической системы, когда, наоборот, фундаментальное знание обогащает прикладное. Все это выражается в том, что в фундаментальных статьях мы видим ссылки на прикладные работы, а в прикладных — на фундаментальные.

Положим также, что наличие патентов на изобретения не влияет на рост прикладных статей. Действительно, в прикладных статьях мы редко видим ссылки на патенты. Если в некоторых областях исследований это не так, то следует ввести функцию $f_2(x, z)$.

При написании третьего уравнения мы положили, что на формирование описаний изобретений влияет исключительно прикладное знание. Действительно в описаниях изобретений мы практически не видим ссылки на фундаментальные статьи.

В простейшем случае, как это делается в уравнениях популяционной динамики, естественно задать линейный вид функции f_i , тогда придем к динамической системе.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\alpha_1 + b_1y)x - k_1x - \beta_1x^2 \\ \frac{dy}{dt} = (\alpha_2 + b_2x)y - k_2y - \beta_2y^2 \\ \frac{dz}{dt} = (\alpha_3 + b_3y)z - k_3z - \beta_3z^2. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь члены, связанные с генерированием результатов НИОКР разного вида, хорошо вписываются в представление о взаимном обогащении и комплементарности знаний при подготовке к публикации результатов НИОКР. Например, член, отвечающий за генерирование фундаментальных статей, разбивается на два: $\alpha_1x + b_1yx$, где первый отвечает за самовоспроизводство фундаментальных работ (фундаментальные статьи сами себя воспроизводят по мальтузианскому закону), а второй — за взаимное обогащение фундаментальных и прикладных знаний (вероятность встречи нескольких комплементарных фундаментальных и прикладных публикаций, ведущих к новым фундаментальным или прикладным работам, является аналогом частоты встречаемости хищников и жертв в модели Лотки-Вольтерра).

Если, как отмечалось ранее, будет необходимо ввести коэффициент роста прикладных статей в зависимости как от количества фундаментальных статей, так и от количества описаний на изобретения, то в линейном приближении он будет иметь вид:

$$f_2(x, z) = a_2 + b_2x + c_2z.$$

В динамической системе (3), сгруппировав линейные члены, можно выделить коэффициенты $\bar{a}_i = a_i - k_i$, аналогичные коэффициентам суммарного роста в демографии (разность между коэффициентами рождаемости и смертности). Теперь можно приступить к математическому анализу динамической системы (3).

Все ее восемь особых точек получены в виде:

1. $x^* = 0, y^* = 0, z^* = 0;$
2. $x^* = 0, y^* = 0, z^* = \frac{a_3 - k_3}{\beta_3};$
3. $x^* = 0, y^* = \frac{a_2 - k_2}{\beta_2}, z^* = 0;$
4. $x^* = \frac{a_1 - k_1}{\beta_1}, y^* = 0, z^* = 0;$
5. $x^* = 0, y^* = \frac{a_2 - k_2}{\beta_2},$
 $z^* = \frac{\beta_2(a_3 - k_3) + b_3(a_2 - k_2)}{\beta_2\beta_3};$
6. $x^* = \frac{a_1 - k_1}{\beta_1}, y^* = 0, z^* = \frac{a_3 - k_3}{\beta_3};$
7. $x^* = \frac{\beta_2(a_1 - k_1) + b_1(a_2 - k_2)}{\beta_1\beta_2 - b_1b_2},$
 $y^* = \frac{\beta_1(a_2 - k_2) + b_2(a_1 - k_1)}{\beta_1\beta_2 - b_1b_2}, z^* = 0;$
8. $x^* = \frac{\beta_2(a_1 - k_1) + b_1(a_2 - k_2)}{\beta_1\beta_2 - b_1b_2},$

$$y^* = \frac{\beta_1(a_2 - k_2) + b_2(a_1 - k_1)}{\beta_1\beta_2 - b_1b_2},$$

$$z^* = \frac{b_2b_3(a_1 - k_1) + \beta_1b_3(a_2 - k_2) + (a_3 - k_3)(\beta_1\beta_2 - b_1b_2)}{\beta_3(\beta_1\beta_2 - b_1b_2)};$$

Матрица Якоби линеаризованной динамической системы (3) в произвольной особой точке имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - k_1 + b_1y^* - 2\beta_1x^* & b_1x^* & \\ b^2y^* & a_2 - k_2 + b_2x^* - 2\beta_2y^* & \\ 0 & b_3z^* & \\ 0 & & \\ 0 & & \\ a_3 - k_3 + b_3y^* - 2\beta_3z^* & & \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для восьмой нетривиальной особой точки она упростится и примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta_1x^* & b_1x^* & 0 \\ b_2y^* & -\beta_2y^* & 0 \\ 0 & b_3z^* & -\beta_3z^* \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Характеристическое уравнение в этой точке после всех преобразований запишем в виде:

$$|A - \lambda I| = (\beta_3z^* + \lambda)[b_1b_2x^*y^* - (\beta_1x^* + \lambda)(\beta_2y^* + \lambda)] = 0. \quad (6)$$

Из него получим собственные числа матрицы Якоби:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(\beta_1x^* + \beta_2y^*)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\beta_1x^* + \beta_2y^*)^2}{4} - (\beta_1\beta_2 - b_1b_2)x^*y^*} =$$

$$= \frac{-(\beta_1x^* + \beta_2y^*) \pm \sqrt{(\beta_1x^* - \beta_2y^*)^2 + 4b_1b_2x^*y^*}}{2},$$

$$\lambda_3 = -\beta_3z^*.$$

Анализ выражений первых двух собственных чисел с учетом того, что $\lambda_3 = -\beta_3z^* < 0$, приводит к следующим условиям:

1. при $\beta_1\beta_2 - b_1b_2 > 0$ имеем $\lambda_{1,2} < 0$;
2. при $\beta_1\beta_2 - b_1b_2 < 0$ имеем $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$.

В первом случае имеет место устойчивый узел, во втором — седло. Учитывая, что при нормальном процессе генерирования результатов разных видов НИОКР $a_i - k_i > 0$, из выражений для нетривиальной особой точки следует, что $\beta_1\beta_2 - b_1b_2 > 0$ (условие положительности ее координат). Это хорошо согласуется с первым случаем устойчивости нетривиальной особой точки.

Данный анализ интересен тем, что он не требует подстановки в $\lambda_{1,2}$ явных и громоздких выражений для координат нетривиальной особой точки. Для остальных семи особых точек сразу же запишем собственные числа матриц Якоби (нумерация и выражения для координат приведены выше):

1. $\lambda_1 = a_1 - k_1, \lambda_2 = a_2 - k_2, \lambda_3 = a_3 - k_3$;
2. $\lambda_1 = a_1 - k_1, \lambda_2 = a_2 - k_2, \lambda_3 = k_3 - a_3$;

3. $\lambda_1 = \frac{\beta_2(a_1 - k_1) + b_1(a_2 - k_2)}{\beta_2}, \lambda_2 = k_2 - a_2, \lambda_3 = \frac{\beta_2(a_3 - k_3) + b_3(a_2 - k_2)}{\beta_2}$;
4. $\lambda_1 = k_1 - a_1, \lambda_2 = \frac{\beta_2(a_1 - k_1) + b_1(a_2 - k_2)}{\beta_2}, \lambda_3 = a_3 - k_3$;
5. $\lambda_1 = \frac{\beta_2(a_1 - k_1) + b_1(a_2 - k_2)}{\beta_2}, \lambda_2 = k_2 - a_2, \lambda_3 = \frac{-\beta_2(a_3 - k_3) - b_3(a_2 - k_2)}{\beta_2}$;
6. $\lambda_1 = k_1 - a_1, \lambda_2 = \frac{\beta_1(a_2 - k_2) + b_2(a_1 - k_1)}{\beta_1}, \lambda_3 = k_3 - a_3$;
7. $\lambda_3 = \frac{(a_3 - k_3)(\beta_1\beta_2 - b_1b_2) + b_3\beta_1(a_2 - k_2) + b_3b_2(a_1 - k_1)}{\beta_1\beta_2 - b_1b_2}, \lambda_{1,2} — \text{анало-}$

гичны выражениям для восьмой особой точки.

При нормальном ходе научно-исследовательского процесса, когда суммарный коэффициент роста публикаций и патентов на изобретения положительный ($a_i - k_i > 0$), приходим к следующему характеру устойчивости особых точек: тогда 1 — неустойчивый узел, точки 2–7 — седла.

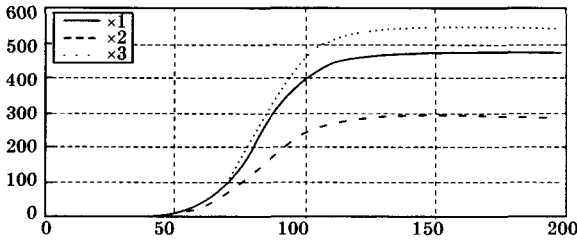
Таким образом, все семь особых точек, содержащих от одного до трех нулей, являются неустойчивыми, и единственной устойчивой точкой при определенных условиях может быть только восьмая нетривиальная точка.

Рассмотрим случай исчерпавшей себя области исследования, находящейся в стадии умирания (k_i — большое), или случай тупикового исследования ($a_i \approx 0$): $a_i - k_i < 0$, тогда точка 1 является устойчивым узлом, точки 2–7 — седлами. Следовательно, здесь получаем разумный результат:

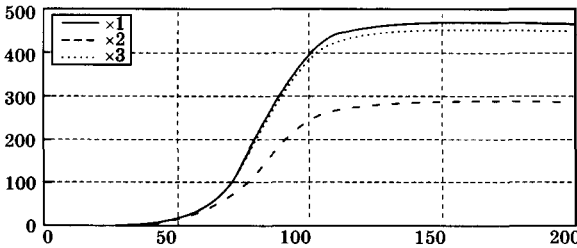
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Из выражений для координат нетривиальной особой точки в зависимости от соотношений параметров модели можно получать различные соотношения для её координат. Например, из $\beta_2 > b_2, b_1 > \beta_1$ следует, что $x^* > y^*$ (в стационарном случае количество фундаментальных статей превышает количество прикладных статей). Учитывая, что $z^* = \frac{b^3}{\beta_3}y^* + \left(\frac{a_3 - k_3}{\beta_3}\right)$, то из неравенства $b_3 > \beta_3$ сразу же получим $z^* > y^*$. Ясно, что с некоторого критического значения b_3 , зависящего от $(a_3 - k_3)/\beta_3$ и удовлетворяющего неравенству $b_3 < \beta_3$, будет выполняться противоположное неравенство $z^* < y^*$ (количество прикладных статей превышает количество патентов на изобретения).

Ниже приведем результаты нескольких численных экспериментов с моделью (3), иллюстрирующие вышеуказанные соотношения между координатами нетривиальной особой точки (рисунок).



Параметры модели и рассчитанные координаты нетривиальной особой точки:
 $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.2, b_1 = 0.0008, b_2 = 0.001, b_3 = 0.0006,$
 $k_1 = 0.1, k_2 = 0.1, k_3 = 0.1, \beta_1 = 0.0007, \beta_2 = 0.002, \beta_3 = 0.0005,$
 $x_1 = 467, x_2 = 283, x_3 = 540$



Параметры модели и рассчитанные координаты нетривиальной особой точки:
 $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.2, b_1 = 0.0008, b_2 = 0.001, b_3 = 0.0006,$
 $k_1 = 0.1, k_2 = 0.1, k_3 = 0.1, \beta_1 = 0.0007, \beta_2 = 0.002, \beta_3 = 0.0006,$
 $x_1 = 467, x_2 = 283, x_3 = 450$

Результаты численных экспериментов по модели (3)

Если $k_i = 0$ и $\beta_i \neq 0$, то имеем те же условия для устойчивости нетривиальной особой точки.

Если $k_i \neq 0, \beta_i = 0$, то при $a_i - k_i > 0$ нулевая особая точка является неустойчивым узлом (бесконечно растущие со временем решения), при $a_i - k_i < 0$ — нулевая особая точка является устойчивым узлом (стремящиеся к нулю со временем решения), особая точка $x^* = (k_2 - a_2)/b_2, y^* = (k_1 - a_1)/b_1$, для системы первых двух уравнений (3) является седлом, т. е. неустойчивой.

Если $k_i = 0, \beta_i = 0$, то при $a_i \neq 0$ нулевая особая точка является неустойчивым узлом (в отсутствие прямых и косвенных потерь актуальности и значимости результатов НИОКР нет препятствий для их неограниченного роста), а при $a_i = 0$ аналитическое решение системы первых двух уравнений (3) при $t \rightarrow \infty$ приводит к следующим предельным решениям:

1. при $b_1 y_0 - b_2 x_0 > 0$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 - b_1 y_0 / b_2 < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0;$

2. при $b_1 y_0 - b_2 x_0 < 0$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0 - (b_2 / b_1) x_0 < 0$, где $x(t = 0) = x_0, y(t = 0) = y_0$ — начальные условия системы уравнений (3).

Самый последний результат говорит о том, что в отсутствие самовоспроизводства результатов фундаментальных ($a_1 = 0$) и прикладных ($a_2 = 0$) исследований такие исследования развиваться не могут.

Предлагаемая модель может быть откалибрована и апробирована на материалах эмпирических наукометрических и патентометрических исследований, хотя практическая задача разделения всего потока научных исследований (статей) на фундаментальные и прикладные является достаточно сложной.

Переменные коэффициенты роста в уравнениях популяционной динамики, химической и биофизической кинетики часто задают не линейной функцией, а функцией, описывающей самоограниченный рост этих коэффициентов. Обычно такой

коэффициент задаётся функцией $f(x) = \frac{bx}{c + dx}$, где b, c, d — положительные константы, тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{b}{d}$.

Приняв такой стандартный вид переменных коэффициента роста и в нашей исходной динамической системе, придём к следующей модели

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{b_1 y x}{c_1 + d_1 y} - k_1 x - \beta_1 x^2 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{b_2 x y}{c_2 + d_2 y} - k_2 y - \beta_2 y^2 \\ \frac{dz}{dt} = \frac{b_3 y z}{c_3 + d_3 y} - k_3 z - \beta_3 z^2 \end{cases} \quad (7)$$

В отличие от предыдущей динамической системы с линейными коэффициентами f_i , здесь естественно отсутствуют члены, отвечающие за самовоспроизводство статей и патентов на изобретения.

В случае влияния на коэффициент роста прикладных статей не только фундаментальных статей, но и патентов на изобретения можно ввести функцию $f_2(x, z) = \frac{b_2 x z}{c_2 + d_2 x z}$.

Вычисление особых точек динамической системы (7) аналитическим способом затруднительно. В предположении $k_i = 0$ координаты нетривиальной особой точки получены в виде

$$\begin{cases} x^* = \frac{b_1 b_2 - c_1 c_2 \beta_1 \beta_2}{\beta_1 (b_2 d_1 + c_1 d_2 \beta_2)}, & y^* = \frac{b_1 b_2 - c_1 c_2 \beta_1 \beta_2}{\beta_2 (b_1 d_2 + c_2 d_1 \beta_1)} \\ z^* = \frac{b_3 (b_1 b_2 - c_1 c_2 \beta_1 \beta_2)}{c_3 \beta_2 \beta_3 (b_1 d_2 + c_2 d_1 \beta_1) + d_3 \beta_3 (b_1 b_2 - c_1 c_2 \beta_1 \beta_2)} \end{cases} \quad (8)$$

Для этой точки нами получено характеристическое уравнение матрицы Якоби линеаризованной системы (7) с учётом $k_i \neq 0$

$$(-\beta_3 z^* - \lambda) \left[\lambda_2 + (\beta_1 x^* + \beta_2 y^*) + \beta_1 \beta_2 x^* y^* - \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 x^* y^*}{(c_2 + d_2 x^*)^2 (c_1 + d_1 y^*)^2} \right] = 0, \quad (9)$$

откуда следует $\lambda_1 = -\beta_3 z^* < 0$,

$$\lambda_{2,3} = -\frac{\beta_1 x^* + \beta_2 y^*}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(\beta_1 x^* + \beta_2 y^*)^2}{4} - \left[\beta_1 \beta_2 - \frac{b_1 b_2 c_1 c_2}{(c_2 + d_2 x^*)^2 (c_1 + d_1 y^*)^2} \right] x^* y^*} = -\frac{(\beta_1 x^* + \beta_2 y^*)}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(\beta_1 x^* + \beta_2 y^*)^2}{4} + \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 x^* y^*}{(c_2 + d_2 x^*)^2 (c_1 + d_1 y^*)^2}}$$

Из двух выражений для $\lambda_{2,3}$, с учётом $\lambda_1 < 0$, при $\beta_1 \beta_2 - \frac{b_1 b_2 c_1 c_2}{(c_2 + d_2 x^*)^2 (c_1 + d_1 y^*)^2} > 0$ имеем устойчивый узел ($\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$), а при обратном неравенстве — седло ($\lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$). Еще раз отметим, что эти выкладки проделаны с учётом $k_i \neq 0$, но координаты особой нетривиальной точки получены при $k_i = 0$ (8)

Кроме нетривиальной особой точки динамическая система (7) при $k_i = 0$ имеет нулевую особую точку ($x^* = y^* = z^* = 0$) и особую точку $x^* \neq 0$, $y^* \neq 0$, $z^* = 0$, где x^* , y^* находятся из выражений (8). Нулевая особая точка приводит к вырожденному характеристическому уравнению: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а вторая особая точка с одной нулевой координатой приводит к характеристическому уравнению (9), в котором вместо сомножителя в круглых скобках $(-\beta_3 z^* - \lambda)$ стоит $\left(\frac{\beta_3 y^*}{c_3 + d_3 y^*} - \lambda\right)$. Из этого характеристического уравнения следует, что $\lambda_1 > 0$, и, следовательно, рассматриваемая особая точка является неустойчивой.

Таким образом, в обоих рассмотренных случаях, при линейных и нелинейных функциях f_i , в нетривиальной особой точке получены условия возникновения устойчивого узла и неустойчивого седла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 286 с.
2. Московкин В. М. Основы концепции диффузии инноваций // Бизнес Информ. — Харьков, 1998. — № 17-18. — С. 41-48.
3. Яблонский А. И. Математические модели в исследовании науки. — М.: Мысль, 1986.
4. Московкин В. М., Журавка А. В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий (контекст уравнений популяционной динамики в социально-экономических системах) // Бизнес Информ. — Харьков, 2002. — № 5-6. — С. 27-34.
5. Gause G. F. Experimental studies of the struggle for existence // J. Exp. Biol. — 1932. — Vol. 9, № 4. — P. 389-402.

Материал поступил в редакцию 02.12.10.